

Strukturuntersuchungen über das
Radikal einer Algebra

Dissertation

von

Helmut Dittmann aus Nürnberg.

1956

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Erlangen

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 1956

Dekan: Universitätsprofessor Dr. Th. Schneider

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. W. Specht

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. G. Nöbeling



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546223_0063



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Grundlagen und klassische Struktursätze	6
3. Signierungen einer Algebra	11
4. Verschränkte Produkte	23
5. Haupt- und Ergänzungssatz	34
6. Automorphismen verschränkter Produkte	55

1. Einleitung

$\mathcal{A}$ sei eine Algebra mit endlicher Basis über dem kommutativen Körper P . Es existiert dann in $\mathcal{A}$ ein maximales nilpotentes Ideal $\mathcal{N}$ (welches alle nilpotenten Rechts- und Linksideale umfaßt), das Radikal von $\mathcal{A}$.

Ist das Radikal das Nullideal, so nennt man $\mathcal{A}$ halbeinfach. Die Struktur solcher Algebren ist gut bekannt. Sie lassen sich darstellen als direkte Summe von sich gegenseitig annullierenden einfachen Algebren. Jede einfache Algebra ist wiederum ein voller Matrixring in einem bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Schiefkörper (Wedderburnscher Satz).

Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra mit einem von Null verschiedenen Radikal, so ist der Restklassenring $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ halbeinfach. Während man also die Struktur dieses Restklassenringes vollkommen beherrscht, weiß man über die Struktur von $\mathcal{A}$ selbst nur wenig.

L.E. Dickson (Algebren und ihre Zahlentheorie) beweist, daß $\mathcal{A}$ einen zu $\mathcal{A}/\mathcal{N} = \mathcal{H}$ isomorphen Teilring $\bar{\mathcal{H}}$ enthält, $\mathcal{A}$ also darstellbar ist als direkte Summe $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{N}$. (Dabei ist vorausgesetzt, daß die Zentren der einfachen Bestandteile von $\mathcal{H}$ über P separabel sind.) In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen die Aufspaltung $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{N}$ in dem Sinn eindeutig ist, daß jede zweite Aufspaltung $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{H}}' \oplus \mathcal{N}$ aus der ersten durch Anwendung eines Automorphismus von $\mathcal{A}$ hervorgeht.

Die weiteren Ergebnisse betreffen Algebren mit Einheit, für welche die einfachen Bestandteile von $\mathcal{A}/\mathcal{N} = \mathcal{H}$ ähnliche, über dem Koeffizientenkörper Z normale Algebren sind.

(Diese Voraussetzung gilt immer, wenn der Koeffizientenkörper Z algebraisch abgeschlossen ist. Sie gilt auch immer für $\mathcal{R}_\Omega$, wenn $\Omega|Z$ einen Zerfällungskörper von $\mathcal{R}$ bedeutet.) Solchen Algebren $\mathcal{R}$ ist eine noch näher zu charakterisierende Algebra $\mathfrak{f}$ über Z (der "erweiterte Kern von $\mathcal{R}$ ") zugeordnet, derart, daß $\mathcal{R}$ isomorph wird einem "verschränkten Produkt" von $\mathfrak{f}$ mit dem Restklassenring $\mathcal{R}/\kappa = \mathcal{L}$.

Verschränkte Produkte sind eine Verallgemeinerung der direkten Produkte. Sie zeigen in ihrer Struktur eine gewisse Ähnlichkeit zu den verschränkten Produkten der Gruppentheorie. Ihre Elemente sind Summen von Ausdrücken der Form

$$a \cdot k \quad \text{oder} \quad k \cdot a \quad \text{mit} \quad a \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad k \in \mathfrak{f}.$$

Dabei sind allerdings nur gewisse Ideale $\mathfrak{l}_{\xi\tau}$ und $\mathfrak{r}_{\xi\lambda}$ in $\mathcal{L}$ und gewisse Moduln $T_{\xi\tau}$ in $\mathfrak{f}$ zur Entnahme der Faktoren zugelassen. Die Elemente $a \cdot k$ bzw. $k \cdot a$ des verschränkten Produktes erfüllen dann eine formale Vertauschungsrelation

$$a \cdot k = k \cdot \omega_{\xi\tau}(a) \quad \text{falls} \quad k \in T_{\xi\tau}.$$

Diese Vertauschungsrelation muß bei der Produktbildung angewendet werden. Die $\omega_{\xi\tau}(\xi, \tau = 1, 2, \dots, p)$ bedeuten ein in $\mathcal{L}$ erklärtes System von Isomorphismen, welche untereinander durch die Bedingungen

$$\omega_{\xi\tau} \cdot \omega_{\tau\lambda} = \omega_{\xi\lambda} \quad (\xi, \tau, \lambda = 1, 2, \dots, p)$$

verknüpft sind. Die Moduln $T_{\xi\tau}(\xi, \tau = 1, 2, \dots, p)$ erfüllen im Sinn der Komplexmultiplikation die analogen Bedingungen

$$T_{\xi\tau} \cdot T_{\tau\lambda} \subseteq T_{\xi\lambda}.$$

Das verschränkte Produkt wird insbesondere ein direktes, wenn man in $\mathfrak{f}$ nur einen zugelassenen Modul $T = \mathfrak{f}$ hat und nur den identischen Isomorphismus ω in $\mathcal{L}$. Es gilt dann $a \cdot k = k \cdot a$. Dieser Fall ergibt sich immer, wenn

$\mathcal{R}/\mathcal{K}$ einfach ist. Man erhält so als Spezialfall einen bekannten Struktursatz über primäre Algebren.

Im allgemeinen Fall (wenn also $\mathcal{R}/\mathcal{K} = \mathcal{H}$ aus ähnlichen normalen Algebren besteht) ist der erweiterte Kern $\mathcal{f}$ eine Algebra über $\mathcal{Z}$ mit dem Radikal $\mathcal{K}$. $\mathcal{f}/\mathcal{K}$ ist direkte Summe von zu $\mathcal{Z}$ isomorphen Körpern. Das verschränkte Produkt von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{H}$ gibt das Radikal $\mathcal{K}$ von $\mathcal{R}$.

Der erweiterte Kern $\mathcal{f}$ ist eindeutig bestimmt, wenn alle Aufspaltungen $\mathcal{R} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ durch einen Automorphismus von $\mathcal{R}$ auseinander hervorgehen, wenn also nur eine Aufspaltungs-klasse vorhanden ist.

Das Problem, in einer Algebra $\mathcal{f}$ Moduln $T_{\xi\tau}$ ($\xi, \tau = 1, 2, \dots, p$) zu finden, deren direkte Summe $\mathcal{f}$ ist, und für die die Bedingungen $T_{\xi\tau} \cdot T_{\tau\lambda} \subseteq T_{\xi\lambda}$ erfüllt sind, bietet auch für sich Interesse als eine Verallgemeinerung des Darstellungsproblem. Man kann aus einer Aufspaltung $\{T_{\xi\tau}\}$ von $\mathcal{f}$ auf drei Arten neue zulässige Aufspaltungen herleiten: 1. Durch Umnumerierung. 2. Durch Anwendung von Automorphismen von $\mathcal{f}$ auf die $T_{\xi\tau}$. 3. Durch Zusammenfassung von gewissen der $T_{\xi\tau}$ zu umfassenderen Moduln $T'_{\xi\lambda}$. Es zeigt sich, daß unter sehr schwachen Voraussetzungen alle zulässigen Aufspaltungen einer Algebra mit Einheit aus einer bestimmten "Stamm-aufspaltung" durch Anwendung der drei Verfahren hergeleitet werden können.

Wendet man dieses Ergebnis auf verschränkte Produkte an, so ergibt sich, daß zu vorgegebenen Faktoren $\mathcal{f}$ und $\mathcal{H}$ nur - bis auf Isomorphie - endlich viele verschiedene verschränkte Produkte möglich sind.

Im letzten Teil der Arbeit wird die Automorphismengruppe von verschränkten Produkten untersucht.

2. Grundlagen und klassische Struktursätze

1. Eine Algebra $\mathcal{A}$ über dem Koeffizientenkörper P ist ein P -Modul, für dessen Elemente ein assoziatives Produkt erklärt ist. Wir betrachten im Folgenden nur endliche Algebren; d.h. der P -Modul besitze immer eine endliche Basis über P . Jedes $a \in \mathcal{A}$ ist dann in der Form
- $$a = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad (\alpha_i \in P) \text{ darstellbar.}$$

2. Faktorensysteme: Die Algebra $\mathcal{A}$ mit der Basis $u_1, u_2, \dots, u_n$ über P ist durch Angabe eines Faktorensystemes $\{\alpha_{ij}^k\}$ eindeutig bestimmt:

$$u_i u_j = \sum_k \alpha_{ij}^k u_k \quad (\alpha_{ij}^k \in P).$$

Dieses Faktorensystem muß einer Assoziativitätsrelation genügen. Es ist nicht eindeutig bestimmt, ebensowenig wie die Basis der Algebra. Ist eine andere Basis u'_1 gegeben:

$$u'_i = \sum_m \alpha_i^m u_m, \quad u_i = \sum_m \bar{\alpha}_i^m u'_m, \quad \alpha_i^m \in P$$

so gilt

$$\begin{aligned} u'_i u'_j &= \sum_k \alpha_{ij}^k u'_k = \sum_m \alpha_i^m \alpha_j^n u_m u_n = \sum_m \alpha_i^m \alpha_j^n \alpha_{mn}^1 u_1 \\ &= \sum_m \alpha_i^m \alpha_j^n \alpha_{mn}^1 \bar{\alpha}_1^k u'_k \end{aligned}$$

Durch Vergleich folgt:

$$\alpha_{ij}^{k,1} = \sum_m \alpha_i^m \alpha_j^n \alpha_{mn}^1 \bar{\alpha}_1^k.$$

Wir nennen zwei Faktorensysteme, welche durch eine derartige Transformation auseinander hervorgehen, assoziiert. Assoziierte Faktorensysteme gehören also zu isomorphen Algebren.

3. Ideale: Als (Rechts-, Links-, zweiseitiges) Ideal in $\mathcal{A}$ lassen wir nur ein solches zu, welches auch die Multiplikation mit P gestattet; eine Bedingung, die automatisch erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ eine Einheit enthält.
4. Einfachheit: Läßt sich jedes Element von $\mathcal{A}$ als Summe von

Elementen aus den Teilmoduln $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_r$ darstellen, so ist $\mathcal{R}$ Summe dieser Moduln $\mathcal{R} = \sum_i \mathcal{M}_i$; ist die Darstellung von $\mathcal{R}$ mit Komponenten aus den $\mathcal{M}_i$ eindeutig, so ist die Summe direkt: $\mathcal{R} = \sum^\oplus \mathcal{M}_i$.

Ein Modul $\mathcal{M}$ in $\mathcal{R}$ (mit Operatoren) heißt einfach, wenn er außer (0) keinen echten Teilmodul enthält (der denselben Operatorenbereich gestattet). Ist $\mathcal{R}$ Summe von einfachen Moduln, so auch direkte Summe einer Untermenge derselben. In diesem Fall nennt man $\mathcal{R}$ vollreduzibel.

Sind $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ Moduln mit demselben (Links-) Operatorenbereich Ω , so verstehen wir unter einem Ω -Isomorphismus von $\mathcal{M}_1$ auf $\mathcal{M}_2$ einen Isomorphismus, für den $\omega(\theta \cdot m) = \theta \omega(m)$ gilt für jedes $m \in \mathcal{M}_1$ und $\theta \in \Omega$.

5. Direktes Produkt: Sind $\mathcal{A} = \sum^\oplus u_i P$ und $\mathcal{L} = \sum^\oplus v_j P$ zwei Algebren über P , so ist das "direkte Produkt" $\mathcal{A} \otimes_P \mathcal{L}$ von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ über P eine Algebra mit den Basiselementen $u_i v_j$, wobei $u_i v_j = v_j u_i$ angenommen wird. Das direkte Produkt ist wieder eine assoziative Algebra über P . Ist Ω eine endliche algebraische Erweiterung von P , so ist für $\mathcal{R} \otimes \Omega$ die Bezeichnung $\mathcal{R}_\Omega$ üblich.

6. Das Radikal: Ein Ideal $\mathfrak{u}$ in $\mathcal{R}$ heißt nilpotent, wenn eine ganze Zahl ϱ existiert, so daß $\mathfrak{u}^\varrho = (0)$ ist. Die Summe zweier nilpotenter (Rechts-, Links-) Ideale ist wieder ein solches. Wegen der Endlichkeit der Basis existiert daher ein maximales nilpotentes Rechtsideal, welches alle derartigen Rechtsideale umfaßt. Dieses ist zweiseitig und wird das Radikal $\mathcal{N}$ von $\mathcal{R}$ genannt. Jede Algebra besitzt also ein Radikal, welches auch das Nullideal sein kann. In diesem Fall heißt die Algebra halbeinfach. Über die Struktur der Algebren ist Folgendes bekannt:

7. Struktur von $\mathcal{R}/\mathcal{N}$: Eine Algebra mit Einheit heißt einfach, wenn sie außer (0) kein echtes zweiseitiges Teilideal enthält. Jede halbeinfache Algebra – also auch $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ – ist direkte Summe von sich gegenseitig annullierenden einfachen Algebren. Die einfachen Komponenten sind eindeutig bestimmt. Jede einfache Algebra ist wiederum voller Matrixring in einem Schiefkörper K (Wedderburnscher Satz).

8. Struktur von $\mathcal{R}$: Eine Algebra $\mathcal{R}$ mit Einheit heißt primär, wenn ihr Restklassenring nach dem Radikal einfach ist; vollständig primär, wenn $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ ein Schiefkörper ist. Jede primäre Algebra $\mathcal{R}$ ist voller Matrixring in einer vollständig primären Algebra $\mathcal{P}$: $\mathcal{R} = e_{11}\mathcal{P} \oplus e_{12}\mathcal{P} \oplus \dots \oplus e_{nn}\mathcal{P}$. Die e_{ik} bedeuten dabei Matrixeinheiten in $\mathcal{R}$. Ist $\mathcal{R} = e'_{11}\mathcal{P}' \oplus \dots \oplus e'_{nn}\mathcal{P}'$ eine zweite derartige Darstellung, so gibt es einen inneren Automorphismus θ von $\mathcal{R}$, der die e'_{ik} überführt in die e_{ik} und $\mathcal{P}'$ in $\mathcal{P}$.

Weiter ist jede Algebra mit Einheit direkte Summe von primären Algebren und einem additiven Modul aus dem Radikal. Diese klassischen Struktursätze sind nicht auf Algebren beschränkt; sie lassen sich auf den umfassenderen Bereich der halprimären Ringe übertragen (vgl. Deuring, Algebren, 1)

9. Aufspaltung von $\mathcal{R}$ in haleinfachen Bestandteil und Radikal: Sind die Zentren der einfachen Bestandteile von $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ separabel über dem Koeffizientenkörper P , so enthält $\mathcal{R}$ einen zu $\mathcal{R}/\mathcal{N} = \mathcal{H}$ isomorphen Teilring $\bar{\mathcal{H}}$. Es wird dann $\mathcal{R}$ eine direkte Summe von $\bar{\mathcal{H}}$ und $\mathcal{N}$: $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{N}$. Die Teilalgebra $\bar{\mathcal{H}}$ ist nicht eindeutig bestimmt. (Vgl. 5.6.)

10. Direkte und reziproke Darstellungen: Unter einer direkten (reziproken) Darstellung von $\mathcal{R}$ in $(K)_r$ verstehen wir einen direkten (reziproken) P -Operatorhomomorphismus von $\mathcal{R}$ in

den Ring der Matrizen vom Grad r mit Koeffizienten aus K . Zu jeder direkten (reziproken) Darstellung $(\alpha \rightarrow A)$ gehört ein Darstellungsmodul; d.i. ein endlicher K -rechts- $\mathcal{A}$ -links-Modul ($K, \mathcal{A}$ -links-Modul), derart, daß - unter $u_1, u_2, \dots, u_r$ eine Basis des Moduls über K verstanden - bei direkter Darstellung

$$\alpha \cdot (u_1, \dots, u_r) = (u_1, \dots, u_r) \cdot A \quad (\alpha \in \mathcal{A}; A \in (K)_r)$$
gesetzt wird und bei reziproker Darstellung

$$\alpha \cdot (u_1, \dots, u_r) = A \cdot (u_1, \dots, u_r) \quad .$$

Bei Transformation der Basis des Darstellungsmoduls geht die Darstellung in eine "ähnliche" über. Jedem Darstellungsmodul entspricht so eine Klasse von ähnlichen Darstellungen und umgekehrt. Eine Darstellung heißt irreduzibel, wenn der zugehörige Darstellungsmodul einfach ist. Die Bedeutung der reziproken Darstellung ergibt sich daraus, daß eine solche Darstellung der Algebra $\mathcal{A}|P$ in den Schiefkörper K mit dem Zentrum P gegeben wird durch die einfachen Linksideale in dem Restklassenring von $\mathcal{A} \otimes_P K$ nach seinem Radikal.

11. Struktur des direkten Produktes: Das Produkt zweier Algebren $\mathcal{A} \otimes_P \mathcal{B}$ ist einfach, wenn beide Faktoren einfach sind und wenigstens eine der beiden Faktoralgebren normal ist über P , d.h. ihr Zentrum zu P isomorph ist. In Verbindung mit dem am Schluß von 10. Gesagten folgt daraus, daß ein Schiefkörper K von endlichem Grad über seinem Zentrum Z nur eine Klasse von irreduziblen Darstellungen in K zuläßt.

12. Zerfällungskörper: Der Erweiterungskörper $\Omega|P$ heißt Zerfällungskörper der einfachen Algebra $\mathcal{A}|P$, wenn $\mathcal{A}_\Omega$ voller Matrixring über Ω wird. Solche Zerfällungskörper existieren

immer, wenn das Zentrum Z von $\mathcal{A}$ separabel ist über P .
 Ist $\mathcal{A}|P$ halbeinfach, so existiert ein Zerfällungskörper,
 wenn nur die Zentren der einfachen Bestandteile von $\mathcal{A}$
 separabel über P sind. $\mathcal{A}_\Omega$ wird dann direkte Summe von
 vollen Matrixringen in Ω .

Ausführliche Beweise und Verallgemeinerungen der in die-
 sem Kapitel angeführten Sätze finden sich bei M. Deuring,
 Algebren; Ergebnisse der Mathematik, Bd.4.

3. Signierungen einer Algebra

1. Komplexaufspaltung einer Algebra: Es sei $\mathfrak{f}$ eine endliche Algebra über dem Koeffizientenkörper P . Unter einer Komplexaufspaltung von $\mathfrak{f}$ verstehen wir eine Zerlegung von $\mathfrak{f}$ in eine direkte Summe von P -Moduln $T_1, T_2, \dots, T_m$:
 $\mathfrak{f} = \sum_{i=1}^m \oplus T_i$, wenn für die Komplexe T folgende Bedingung erfüllt ist. Zu jedem Paar T_i, T_j gibt es stets ein T_k so, daß

$$T_i \cdot T_j \subseteq T_k \quad \text{ist.}$$

2. Signierung einer Algebra: Wir nehmen an, daß sich die Komplexe T einer Aufspaltung der Algebra $\mathfrak{f}$ so mit Doppelindizes $\varrho \tau$ ($\varrho, \tau = 1, 2, \dots, p$) versehen lassen, daß sich ihre Multiplikationstafel durch folgende Beziehungen ausdrückt:

$$T_{\varrho\tau} \cdot T_{\delta\lambda} = 0 \quad \text{falls } \tau \neq \delta$$

$$T_{\varrho\tau} \cdot T_{\tau\lambda} \subseteq T_{\varrho\lambda}$$

Dabei dürfen auch Nullkomplexe auftreten. Durch eine solche Komplexaufspaltung wird eine Signierung S von $\mathfrak{f}$ mit den Nummern $1, 2, \dots, p$ definiert, nämlich folgendermaßen:

Hat das Element $a \in \mathfrak{f}$ bei seiner Darstellung gemäß $\mathfrak{f} = \sum \oplus T_{\varrho\tau}$ von Null verschiedene Komponenten in den Komplexen

$T_{\varrho_1\tau_1}, T_{\varrho_2\tau_2}, \dots, T_{\varrho_s\tau_s}$, so setzen wir $S(a) = (\varrho_1\tau_1), \dots, (\varrho_s\tau_s)$. Diese Definition ergänzen wir durch $S(0) = \emptyset$.

Die Signierung S ordnet also jedem von Null verschiedenen $a \in \mathfrak{f}$ eine Folge von Doppelindizes aus den Nummern $1, 2, \dots, p$ zu. Den Elementen aus einem der Komplexe wird dabei nur ein Doppelindex zugeordnet. Wir nennen diese Elemente primitiv in Bezug auf S .

Zum späteren Gebrauch führen wir noch folgende Schreibweise ein:

$$(\varrho\tau) \wedge (\tau\lambda) = (\varrho\lambda) \quad \text{und} \quad (\varrho\tau) \wedge (\delta\lambda) = \emptyset \quad \text{falls } \tau \neq \delta \text{ ist.}$$

Ist dann $S(a) = (\varrho\tau)$ und $S(b) = (\sigma\lambda)$ (was also besagt, daß a und b primitiv sind) so gilt entweder $a \cdot b = 0$, also $S(a \cdot b) = \emptyset$, oder $a \cdot b \neq 0$; dann ist $\tau = \sigma$ und $S(a \cdot b) = S(a) \wedge S(b) = (\varrho\lambda)$.

3. Die zu einer Signierung gehörigen Idempotente: Hat $\mathfrak{f}$ eine Einheit ε und ist $\varepsilon_{\varrho\lambda}$ die Komponente von ε im Komplex $T_{\varrho\lambda}$, so ist $\varepsilon_{\varrho\lambda} = 0$ falls $\varrho \neq \lambda$ ist, und $\varepsilon_{\varrho\varrho} = \varepsilon_{\varrho}$ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$) sind Idempotente mit der Eigenschaft

$$(1) \varepsilon_{\varrho} \varepsilon_{\lambda} = 0 \text{ falls } \varrho \neq \lambda$$

$$(2) \text{ Für jedes } x \in T_{\varrho\lambda} \text{ ist } \varepsilon_{\varrho} \cdot x = x \cdot \varepsilon_{\lambda} = x$$

$$(3) \varepsilon_{\varrho} \mathfrak{f} \varepsilon_{\lambda} = T_{\varrho\lambda} \quad (\varrho, \lambda = 1, 2, \dots, p)$$

Auf Grund der Gleichung (3) ist die Signierung einer Algebra mit Einheit durch Angabe der zugehörigen Idempotente eindeutig bestimmt.

Beweis: Es ist zunächst $\varepsilon_{\varrho\lambda} = 0$ zu zeigen. Es gilt

$$\varepsilon \cdot \varepsilon_{\varrho} = \varepsilon_{\varrho} \quad , \text{ also wegen } \varepsilon_{\lambda\sigma} \cdot \varepsilon_{\varrho} = 0 \text{ für } \sigma \neq \varrho :$$

$$\varepsilon_{\varrho} = (\varepsilon_{1\varrho} + \varepsilon_{2\varrho} + \dots + \varepsilon_{\varrho\varrho} + \dots + \varepsilon_{p\varrho}) \varepsilon_{\varrho} = \varepsilon_{1\varrho} \varepsilon_{\varrho} + \varepsilon_{2\varrho} \varepsilon_{\varrho} + \dots + \varepsilon_{\varrho\varrho} \varepsilon_{\varrho} + \dots + \varepsilon_{p\varrho} \varepsilon_{\varrho} .$$

Da $\varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon_{\varrho}$ aus $T_{\lambda\varrho}$ ist und die Summe dieser Komplexe direkt ist, folgt aus der letzten Gleichung:

$$\varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon_{\varrho} = 0 \quad \text{falls } \lambda \neq \varrho \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_{\varrho} \varepsilon_{\varrho} = \varepsilon_{\varrho} .$$

Weiter ist $\varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon = \varepsilon_{\lambda\varrho}$, also gilt für $\lambda \neq \varrho$:

$$\varepsilon_{\lambda\varrho} = \varepsilon_{\lambda\varrho} (\varepsilon_{\varrho 1} + \dots + \varepsilon_{\varrho\varrho} + \dots + \varepsilon_{\varrho p}) = \varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon_{\varrho 1} + \dots + \varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon_{\varrho\varrho} + \dots + \varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon_{\varrho p} .$$

Da wieder $\varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon_{\varrho\tau} \in T_{\lambda\tau}$ ist und die Summe der Komplexe direkt ist, folgt $\varepsilon_{\lambda\varrho} = \varepsilon_{\lambda\varrho} \varepsilon_{\varrho}$. Das ist aber, wie wir oben sahen, gleich Null. Es ist also $\varepsilon = \sum_{\varrho=1}^p \varepsilon_{\varrho}$ und jedes ε_{ϱ} ist von Null verschieden, falls einer der Komplexe $T_{\lambda\varrho}$ ($\lambda=1, 2, \dots, p$) oder $T_{\varrho\lambda}$ vom Nullkomplex verschieden ist; wenn also, mit

anderen Worten, die Nummer φ aus der Indizierung der T nicht gestrichen werden kann. Die Gleichung (2) ergibt sich nun so: Für $x \in T_{\varphi\lambda}$ ist

$$x = \varepsilon \cdot x = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p) x = \varepsilon_\varphi x$$

weil $\varepsilon_\tau x = 0$ ist, falls $\varphi \neq \tau$ ist. Ebenso ergibt sich die zweite Beziehung (2).

Hat die Algebra $\mathfrak{f}$ keine Einheit, so kann man immer durch die Beziehungen (1) und (2) Idempotente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ definieren und zu $\mathfrak{f}$ adjungieren. Die Möglichkeit, Idempotente durch (1) und (2) zu definieren, ergibt sich daraus, daß ein Idempotent aus (2) bereits eindeutig bestimmt ist. Ist ε'_φ ein zweites, welches (2) erfüllt, so gilt $\varepsilon_\varphi \varepsilon'_\varphi = \varepsilon'_\varphi = \varepsilon_\varphi$. Die Algebra $\mathfrak{f}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p]$ ist daher bei gegebener Signierung von $\mathfrak{f}$ eindeutig bestimmt und besitzt eine Einheit.

4. Endlichkeitssatz für Signierungen: Offenbar ist die Frage nach den verschiedenen Signierungen, welche eine Algebra besitzen kann, eine Verallgemeinerung des Darstellungsproblem. Ist nämlich z.B. die einfache Algebra $\mathcal{A}$ als voller Matrixring über dem Körper K dargestellt, so ist diese Darstellung bestimmt durch die Angabe der K -Moduln $K e_{\varphi\tau} = T_{\varphi\tau}$, deren direkte Summe $\mathcal{A}$ ist. Die eindimensionalen Komplexe $T_{\varphi\tau}$ erfüllen gerade die Signierungsbedingungen.

Es ist daher interessant, daß man sich für eine Algebra mit Einheit einen vollen Überblick über alle Signierungen verschaffen kann, auch wenn sie ein von Null verschiedenes Radikal besitzt, wenn nur der Koeffizientenkörper nicht von der Charakteristik zwei ist und die Zentren der einfachen Bestandteile von $\mathfrak{f}/\mathfrak{N}$ separabel über P sind. Wir wollen dazu drei verschiedene Wege zeigen, aus einer gege-

benen Signierung neue Signierungen herzuleiten.

a) Ist ϕ ein Automorphismus von f , so erhalten wir aus der Signierung S die Signierung S^ϕ , wenn wir

$$S^\phi(x) = S(\phi(x)) \quad \text{für jedes } x \in f$$

setzen. S und S^ϕ nennen wir konjugiert. Gehört zu S die Komplexaufspaltung $T_{\varrho\tau}$, so gehört zu S^ϕ die Aufspaltung $T'_{\varrho\tau} = \phi(T_{\varrho\tau})$, welche ebenfalls die Signierungsbedingungen erfüllt.

b) Ist P eine Permutation der Ziffern $1, 2, \dots, p$, so erhält man aus S eine neue Signierung PS durch die Festsetzung:

$$PS(x) = P(S(x)) \quad \text{für jedes } x \in f.$$

Dies soll bedeuten, daß auf sämtliche Doppelindizes von $S(x)$ die Permutation P angewendet wird. Bei einer Permutation werden also die zur Signierung gehörigen Komplexe nur vertauscht. S und PS nennen wir assoziiert.

c) Vergrößerung einer Signierung: Wir teilen die Nummern $1, 2, \dots, p$ so in q Komplexe $M_1, M_2, \dots, M_q$ auf ($q \leq p$), daß jede der Nummern in genau einem der Komplexe vorkommt. Es sei $V(\varrho) = \alpha$, wenn ϱ in M_α vorkommt. Aus der Signierung S geht dann eine neue vergrößerte Signierung VS mit den Nummern $1, 2, \dots, q$ hervor, wenn wir setzen:

$$VS(x) = V(S(x)) \quad \text{für jedes } x \in f.$$

Für $p = q$ wird die Vergrößerung zur Permutation. Wir nennen die Vergrößerung dann unecht.

Hat die Algebra eine Einheit und gehören zu S die Idempotente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$, so gehören offenbar zur Signierung VS die Idempotente

$$\varepsilon'_\varrho = \sum_{\lambda \in M_\varrho} \varepsilon_\lambda \quad \varrho = 1, 2, \dots, q$$

In jeder Algebra mit Einheit gibt es eine Stammsignierung aus der alle anderen Signierungen auf diesen drei Wegen

hergeleitet werden können. Es gilt folgender

Satz 1 (Endlichkeitssatz): Die Algebra $\mathfrak{f}$ habe eine Einheit und die Zentren der einfachen Bestandteile von $\mathfrak{f}/\mathfrak{N}$, des Restklassenringes der Algebra nach ihrem Radikal, seien separabel über dem Koeffizientenkörper $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ sei nicht von der Charakteristik 2. Dann existiert in $\mathfrak{f}$ eine Stammsignierung S_0 , derart, daß jede andere Signierung S konjugiert ist zu einer (evtl. unechten) Vergrößerung von S_0 . Es gilt dann:

$$(\mathcal{V}S_0)^6 = S.$$

6 kann dabei immer als innerer Automorphismus von $\mathfrak{f}$ genommen werden.

Faßt man also alle Signierungen von $\mathfrak{f}$, welche zueinander konjugiert sind, zu einer Signierungsklasse zusammen, so gibt es nur endlich viele solcher Klassen (Endlichkeitss.).

Beweis: Es wird wesentlich die Existenz der Einheit in $\mathfrak{f}$ benutzt. Zu jeder Signierung S gehört dann eine Zerlegung der Einheit in Idempotente (3.3.). Wir zerlegen $\mathfrak{f}$ in eine direkte Summe aus einem zu $\mathfrak{f}/\mathfrak{N}$ isomorphen halbeinfachen Bestandteil $\mathfrak{H}$ und dem Radikal $\mathfrak{N}$ (2.9.). $\mathfrak{H}$ wiederum ist direkte Summe von einfachen Algebren $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), sodaß wir schreiben können: $\mathfrak{f} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_r \oplus \mathfrak{N}$. Jedes $\mathcal{A}_i$ kann als voller Matrixring vom Grad m_i in einem Schiefkörper K_i aufgefaßt werden. Wir gehen von einer festen Darstellung $\mathcal{D}_i$ eines jeden $\mathcal{A}_i$ in K_i aus und bezeichnen die zu den idempotenten Matrizeneinheiten in $\mathcal{D}_i$ gehörigen Elemente von $\mathcal{A}_i$ der Reihe nach mit $\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i, \dots, \varepsilon_{m_i}^i$. Es ist dann $\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^r \sum_{\lambda=1}^{m_i} \varepsilon_\lambda^i$ die Einheit in $\mathfrak{H}$. ε_0 ist aber auch die Einheit in $\mathfrak{f}$. Denn diese stellt sich gemäß der Summenaufspaltung von $\mathfrak{f}$ dar in der Form $\varepsilon = \varepsilon_0 + n$

mit $n \in \mathcal{K}$. Dann ist

$$\varepsilon_0 = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon = (\varepsilon_0 + n) \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + n)$$

woraus folgt $\varepsilon_0 n = n \varepsilon_0 = 0$. Weiter ist

$$\varepsilon = \varepsilon^2 = (\varepsilon_0 + n)(\varepsilon_0 + n) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 n + n \varepsilon_0 + n^2 = \varepsilon_0 + n^2$$

Daraus folgt aber $n^2 = n$, also $n = 0$, da das Radikal kein von Null verschiedenes Idempotent enthält. Es gilt also

$$\varepsilon = \varepsilon_0.$$

Wir numerieren nun die ε_λ^i ($\lambda = 1, 2, \dots, m_i$; $i = 1, 2, \dots, r$)

in irgend einer Weise fortlaufend durch und erhalten einen

Satz von Idempotenten ε_τ ($\tau = 1, 2, \dots, p$), der eine Signierung

S_0 definiert (3.3.). ε'_ρ ($\rho = 1, 2, \dots, q$) sei der Satz von

Idempotenten zu S. Dann ist für jeden Index $\rho = 1, 2, \dots, q$

$$\varepsilon'_\rho = \varepsilon_\rho^{1'} + \varepsilon_\rho^{2'} + \dots + \varepsilon_\rho^{r'} + x'_\rho$$

wobei $\varepsilon_\rho^{i'}$ die Komponente von ε'_ρ in $\mathcal{A}_i$ und x'_ρ die in $\mathcal{K}$

ist. Diese Komponenten sind eindeutig bestimmt wegen der

Direktheit der Summe. Da die $\mathcal{A}_i$ sich gegenseitig annullie-

ren, ist $\varepsilon_\rho^{i'}$ idempotent in $\mathcal{A}_i$.

Hilfssatz 1: Es sei $\mathcal{A}$ eine einfache Algebra und ε_λ ($\lambda = 1, \dots, m$)

seien Idempotenten in $\mathcal{A}$, die in der Darstellung $\mathcal{D}$ von $\mathcal{A}$ in

K die idempotenten Matrixeinheiten $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{mm}$ er-

geben. Die Summe der ε_λ ist die Einheit ε von $\mathcal{A}$. Sind

dann ε'_ρ ($\rho = 1, \dots, s$) von Null verschiedene Idempotenten

in $\mathcal{A}$, deren Summe ebenfalls ε ist, so folgt $s \leq m$ und es

existiert ein reguläres t in $\mathcal{A}$, so daß

$$t \cdot \varepsilon'_\rho \cdot t^{-1} = \sum_{\lambda \in N'_\rho} \varepsilon_\lambda \quad \text{wird,}$$

wobei die Nummern $1, 2, \dots, m$ so auf die N'_ρ ($\rho = 1, \dots, s$)

verteilt sind, daß jede in genau einem der N'_ρ vorkommt.

Zum Beweis des Hilfssatzes betrachten wir die Algebren

$\varepsilon'_\rho \mathcal{A} \varepsilon'_\rho$ ($\rho = 1, \dots, s$). Diese sind einfach und annullieren

sich gegenseitig. Ihre direkte Summe ist eine halbeinfache

Teilalgebra $\mathcal{V}$ von $\mathcal{A}$ mit der Einheit $\varepsilon = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \dots + \varepsilon_g'$.
 Es existiert daher eine Transformation T , so daß $T \cdot \mathcal{V}(\mathcal{V}) \cdot T^{-1}$
 voll ausreduziert wird. In der Darstellung $T \cdot \mathcal{V} \cdot T^{-1}$ hat je-
 des ε_i' Hauptdiagonalgestalt. Ist t in $\mathcal{A}$ so gewählt, daß
 $\mathcal{V}(t \cdot \mathcal{A} \cdot t^{-1}) = T \cdot \mathcal{V}(\mathcal{A}) \cdot T^{-1}$ wird, so hat jedes $t \cdot \varepsilon_i' \cdot t^{-1}$ in der
 Darstellung $\mathcal{V}$ Hauptdiagonalgestalt, woraus die Behauptung
 des Hilfssatzes folgt.

Wendet man den Hilfssatz 1 an, so ergibt sich in jedem $\mathcal{A}_i$
 ($i = 1, 2, \dots, r$) ein t_i , so daß

$$t_i \varepsilon_i' t_i^{-1} = \sum_{\lambda \in N_i} \varepsilon_{\lambda}^1 = \sum_{\tau \in M_i} \varepsilon_{\tau} \quad \text{gilt für } \varrho = 1, 2, \dots, q.$$

Setzt man $t = \sum t_i$, so wird $t^{-1} = \sum t_i^{-1}$ und

$$t \cdot \varepsilon_i' \cdot t^{-1} = \sum_{\tau \in M_i} \varepsilon_{\tau} + x_i \quad \text{für } \varrho = 1, 2, \dots, q \quad (x_i \in \mathcal{M}).$$

Wir können nun weiter in $\mathcal{f}$ ein reguläres u finden, so daß

$$u \cdot t \cdot \varepsilon_i' \cdot t^{-1} \cdot u^{-1} = u \cdot \left(\sum_{\tau \in M_i} \varepsilon_{\tau} + x_i \right) \cdot u^{-1} = \sum_{\tau \in M_i} \varepsilon_{\tau} \quad \text{für } \varrho = 1, 2, \dots, q$$

wird. Dies folgt aus dem Hilfssatz 2, den wir weiter unten
 beweisen. Vorher führen wir den Beweis des Endlichkeits-
 satzes zu Ende. Wir bezeichnen den inneren Automorphismus
 $a \rightarrow u \cdot t \cdot a \cdot t^{-1} \cdot u^{-1}$ von $\mathcal{f}$ mit ϕ^{-1} . Dann ist

$$\phi^{-1}(\varepsilon_i' \cdot \mathcal{f} \cdot \varepsilon_k') = \left(\sum_{\tau \in M_i} \varepsilon_{\tau} \right) \cdot \mathcal{f} \cdot \left(\sum_{\tau \in M_k} \varepsilon_{\tau} \right).$$

Es geht also die zu S gehörige Komplexaufspaltung $T_{\varrho k}'$ unter
 ϕ^{-1} über in eine Komplexaufspaltung einer Vergrößerung von S_0 .
 Daher ist $S^{\phi^{-1}} = VS_0$ oder $S = (VS_0)^{\phi}$.

Zum Beweis des Endlichkeitss. fehlt noch der tiefer liegende

Hilfssatz 2: Der Koeffizientenkörper P von $\mathcal{f}$ sei nicht von
 der Charakteristik 2. Sind ε_i ($i = 1, 2, \dots, q$) Idempotente

in $\mathcal{f}$, deren Summe ε_0 (= Einheit von $\mathcal{f}$) ist, und ist auch

$\varepsilon_i' = \varepsilon_i + x_i$ ($x_i \in \mathcal{M}$; $i = 1, \dots, q$) ein solcher Satz von Idem-
 potenten, so existiert ein nicht singuläres u in $\mathcal{f}$, so daß

$u \cdot \varepsilon_i' \cdot u^{-1} = \varepsilon_i$ wird für $i = 1, 2, \dots, q$.

Den Beweis des Hilfssatzes führen wir in mehreren Schritten.

I. Es sei ξ eines der Idempotente ξ_i ($i = 1, 2, \dots, q$). Wir bilden die Komplexaufspaltung $\mathcal{K} = T_\xi \oplus R_\xi \oplus L_\xi \oplus S_\xi$ nach ξ . Darunter verstehen wir Folgendes: Ist ξ idempotent, so auch $\bar{\xi} = \xi_0 - \xi$ und es gilt $\xi \cdot \bar{\xi} = \bar{\xi} \cdot \xi = 0$. Für $\mathcal{K}$ ergibt sich dann eine Komplexaufspaltung

$$\mathcal{K} = \xi \mathcal{K} \xi \oplus \bar{\xi} \mathcal{K} \xi \oplus \xi \mathcal{K} \bar{\xi} \oplus \bar{\xi} \mathcal{K} \bar{\xi} = T_\xi \oplus R_\xi \oplus L_\xi \oplus S_\xi.$$

Zu dieser Komplexaufspaltung gehört folgende Multiplikationstafel (den Index lassen wir der Einfachheit halber weg):

$$\begin{aligned} T \cdot L &\subseteq L; & T \cdot R &= 0; & T \cdot S &= 0; & L \cdot R &\subseteq T; & L \cdot S &\subseteq L; \\ L \cdot T &= 0; & R \cdot T &\subseteq R; & S \cdot T &= 0; & R \cdot L &\subseteq S; & S \cdot L &= 0; \\ (M) \quad R \cdot S &= 0; & S \cdot S &\subseteq S; \\ S \cdot R &\subseteq R; & T \cdot T &\subseteq T; \end{aligned}$$

Diese Multiplikationstafel wird im Folgenden häufig benutzt.

II. Die Ordnung $O(n)$ eines $n \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ ein Nilring ist, gilt

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^1 \supset \mathcal{K}^2 \supset \mathcal{K}^3 \supset \dots \supset \mathcal{K}^\delta = (0).$$

Ist n in $\mathcal{K}^k$ enthalten, aber nicht in $\mathcal{K}^{k+1}$, so schreiben wir $O(n) = k$. Weiter definieren wir

$$O(n_1, n_2, \dots, n_s) = \text{Min} \{O(n_1), O(n_2), \dots, O(n_s)\}.$$

Es gilt $O(n_1 + n_2 + \dots + n_s) \geq O(n_1, n_2, \dots, n_s)$. Ferner folgt $n = 0$ aus $O(n) \geq \delta$.

III. Idempotentkorrektur. Ist $l \in L_\xi$ und $r \in R_\xi$, so gibt es immer ein $t \in T_\xi$, so daß

$$(\xi + l + t)(\xi + r + t) = \xi \quad \text{ist.}$$

Dann wird $(\xi + r + t)(\xi + l + t) = \xi'$ ein Idempotent. Denn die Rechnung ergibt $\xi' \cdot \xi' = (\xi + r + t) \cdot \xi \cdot (\xi + l + t)$ und dies ist wieder ξ' , da ξ , l und t die Linksmultiplikation

mit ξ "gestatten". Wir nennen t die zu r und l gehörige
Idempotentkorrektur. Wir erhalten t durch schrittweise
 Approximation.

1. Schritt: $(\xi + 1)(\xi + r) = \xi + 1 \cdot r = \xi + n_1$; $n_1 \in T$ und $O(n_1) \geq 2$.

2. Schritt: $\left[(\xi + 1) - \frac{1}{2}n_1\right] \left[(\xi + r) - \frac{1}{2}n_1\right] = \xi + n_1 -$
 $-\frac{1}{2}n_1(\xi + r) - \frac{1}{2}(\xi + 1)n_1 + \frac{1}{4}n_1^2 =$
 $= \xi - n_1r - \frac{1}{2}n_1 + \frac{1}{4}n_1^2 = \xi + n_2$;
 $n_2 \in T$ und $O(n_2) \geq 3$.

3. Schritt: $\left[(\xi + 1 - \frac{1}{2}n_1) - \frac{1}{2}n_2\right] \left[(\xi + r - \frac{1}{2}n_1) - \frac{1}{2}n_2\right] =$
 $= \xi + n_2 - \frac{1}{2}n_2(\xi + r - \frac{1}{2}n_1) - \frac{1}{2}(\xi + 1 - \frac{1}{2}n_1) \cdot n_2 +$
 $+ \frac{1}{4}n_2^2 = \xi - \frac{1}{2}n_2(r - \frac{1}{2}n_1) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}n_1) \cdot n_2 + \frac{1}{4}n_2^2$
 $= \xi + n_3$; $n_3 \in T$ und $O(n_3) \geq 4$.

Das Verfahren läßt sich so fortsetzen. Wegen $O(n_j) \geq j+1$
 ist $n_j = 0$, so daß

$$t = -\frac{1}{2}n_1 - \frac{1}{2}n_2 - \dots - \frac{1}{2}n_{j-1} \text{ gesetzt werden kann,}$$

IV. Änderung der Idempotenkorrektur bei Änderung der
 Anfangswerte r und l . An die Stelle von r und l sollen
 $r + q'$ und $l + q$ treten, mit $q' \in R$ und $q \in L$. An die Stelle
 von t tritt dann $t + v$. $v \in T$ ist dann die Änderung der
 Idempotentkorrektur t . Es gelte also

$$(\xi + 1 + t)(\xi + r + t) = \xi \quad \text{und}$$

$$\left[\xi + (1 + q) + (t + v)\right] \cdot \left[\xi + (r + q') + (t + v)\right] = \xi.$$

Die Ausrechnung des letzten Produktes ergibt nach Umordnung:

$$\begin{aligned} & \left[(\xi + 1 + t) + (q + v)\right] \left[(\xi + r + t) + (q' + v)\right] = \\ & = \xi + (q+v)(\xi+r+t) + (\xi+1+t)(q'+v) + (q+v)(q'+v) = \\ & = \xi + qr + v + vt + lq' + v + tv + qq' + v^2 = \xi. \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurde die Tafel (M) benutzt. Aus der
 letzten Gleichung ergibt sich nun

$$2v + vt + tv + v^2 + qr + lq' + qq' = 0 \quad \text{oder}$$

$$(R) \quad v = -\frac{1}{2}(vt + tv + v^2 + qr + lq' + qq').$$

Diese "Rekursionsformel" für v zeigt, daß

$$O(v) \geq O(q, q') \quad \text{ist.}$$

Denn man kann alle Glieder der rechten Seite von (R), welche v enthalten, zu Null machen, indem man für v rekursive einsetzt. Die Ordnung aller Glieder, in denen v vorkommt, wird dabei immer größer; diese Glieder werden also schließlich Null. Der Ausdruck, welcher dann auf der rechten Seite stehen bleibt, enthält offenbar als Glieder niedrigster Ordnung qr, lq', qq' . Daraus folgt die obige Ordnungsrelation.

V. Eindeutige Bestimmtheit des Idempotenten $\xi + r + l + t + s$ ($r \in R; l \in L; t \in T; s \in S$) durch Angabe von ξ, r und l . Ist auch $\xi + r + l + t' + s'$ ein Idempotent ($s' \in S, t' \in T$), so ist

$$t' = t \quad \text{und} \quad s' = s.$$

Zum Beweis rechnen wir unter Anwendung von (M) aus:

$$\begin{aligned} (\xi + r + l + s + t)(\xi + r + l + s + t) &= \\ &= (\xi + r + l)(\xi + r + l) + (\xi + r + l)(s + t) + (s + t)(\xi + r + l) + (s + t)(s + t) = \\ &= \xi + r + l + rl + lr + t + rt + ls + t + tl + sr + s^2 + t^2 = \\ &= \xi + (r + rt + sr) + (l + tl + ls) + (rl + s^2) + (2t + lr + t^2). \end{aligned}$$

Die eingeklammerten Elemente stammen dabei der Reihe nach aus R, L, S und T . Da $(\xi + r + l + s + t)$ ein Idempotent ist und die Summe der Komplexe R, L, S und T direkt ist, erhalten wir durch Vergleich vier Gleichungen, von denen nur zwei interessieren: $s = rl + s^2$

$$t = 2t + lr + t^2 \quad \text{oder} \quad t = -lr - t^2.$$

Diese beiden Rekursionsformeln für s und t gestatten es, s und t allein aus l und r auszurechnen. s und t sind daher eindeutig bestimmt.

VI. Darstellung des Idempotenten $\xi' = \xi + x = \xi + r + l + s + t$ in der Form $(\xi + \bar{r} + \bar{t})(\xi + \bar{l} + \bar{t})$.

$\bar{r}$, $\bar{l}$ und $\bar{t}$ aus R, L und T finden wir durch sukzessive Approximation. Wegen III und V genügt es, wenn wir $\bar{r}$ und $\bar{l}$ so bestimmen, daß

1. die Komponenten von $(\xi + \bar{r} + \bar{t})(\xi + \bar{l} + \bar{t})$ in R und L mit r und l übereinstimmen und

2. $\bar{t}$ die zu $\bar{r}$ und $\bar{l}$ gehörige Idempotentkorrektur wird.

1. Schritt: Wir beginnen mit $r_1 = r$, $l_1 = l$; für t_1 nehmen wir die nach III bestimmte Idempotentkorrektur zu r_1 und l_1 .

$$\begin{aligned}(\xi + r_1 + t_1)(\xi + l_1 + t_1) &= \xi + l_1 + t_1 + r_1 + r_1 l_1 + r_1 t_1 + t_1 + t_1 l_1 + t_1^2 = \\&= \xi + (l_1 + t_1 l_1) + (r_1 + r_1 t_1) + \dots \\&= \xi + (l_1 + q_1) + (r_1 + q'_1) + \dots\end{aligned}$$

Die Punkte deuten die nicht weiter interessierenden Komponenten aus S und T an. $(l_1 + q_1)$ bzw. $(r_1 + q'_1)$ sind die Komponenten aus L bzw. R.

2. Schritt: Wir setzen $r_2 = r_1 - q'_1$, $l_2 = l_1 - q_1$. Für t_2 nehmen wir die dazu gehörige Idempotentkorrektur: $t_2 = t_1 + v_2$ (v_2 ist die Änderung der Idempotentkorrektur nach IV).

$$\begin{aligned}(\xi + r_2 + t_2)(\xi + l_2 + t_2) &= [(\xi + r_1 + t_1) - (q'_1 - v_2)][(\xi + l_1 + t_1) - (q_1 - v_2)] = \\&= (\xi + r_1 + t_1)(\xi + l_1 + t_1) - (\xi + r_1 + t_1)(q_1 - v_2) - (q'_1 - v_2)(\xi + l_1 + t_1) + \\&\quad + (q'_1 - v_2)(q_1 - v_2) = \\&= \xi + (l_1 + q_1) + (r_1 + q'_1) + \dots\end{aligned}$$

$$-q_1 + r_1 v_2 - t_1 q_1 + \dots$$

$$-q'_1 + v_2 l_1 - q'_1 t_1 + \dots$$

$$-q'_1 v_2 - v_2 q_1 + \dots =$$

$$= \xi + (l_1 - t_1 q_1 + v_2(l_1 - q_1)) + (r_1 - q'_1 t_1 + (r_1 - q'_1) v_2) + \dots =$$

$$= \xi + (l_1 - t_1 q_1 + v_2 l_2) + (r_1 - q'_1 t_1 + r_2 v_2) + \dots =$$

$$= \xi + (l_1 + q_2) + (r_1 + q'_2) + \dots$$

k. Schritt: Wir setzen $r_k = r_{k-1} - q'_{k-1}$, $l_k = l_{k-1} - q_{k-1}$

und $t_k = t_{k-1} + v_k$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 (\xi + r_k + t_k)(\xi + l_k + t_k) &= \xi + (1 - t_{k-1} q_{k-1} + v_k l_k) + (r - q_{k-1} t_{k-1} + r_k v_k) + \\
 &= \xi + (1 + q_k) + (r + q_k') + \dots
 \end{aligned}$$

Es ist $O(q_1, q_1') \geq 2$ und daher wegen IV $O(v_2) \geq 3$

Also $O(q_2, q_2') \geq 3$ und daher $O(v_3) \geq 4$

Also $O(q_3, q_3') \geq 4$ und daher $O(v_4) \geq 5$ usw.

Es ist also $O(q_j, q_j')$ und daher $q_j = q_j' = 0$. Nimmt man daher $\bar{r} = r_j$ und $\bar{l} = l_j$, so erhält man die gewünschte Darstellung.

VII. Beweis des Hilfssatzes 2: Aus VI geht hervor, daß sich jedes der Idempotente ξ_φ so darstellen läßt:

$$\xi_\varphi = (\xi_\varphi + r_\varphi + t_\varphi) \xi_\varphi (\xi_\varphi + l_\varphi + t_\varphi).$$

Nun ist $\sum_{\varphi=1}^q \xi_\varphi = \xi_0 = \sum_{\varphi=1}^q (\xi_\varphi + r_\varphi + t_\varphi) \xi_\varphi (\xi_\varphi + l_\varphi + t_\varphi) =$

$$(R) \quad = \left[\sum_{\varphi=1}^q (\xi_\varphi + r_\varphi + t_\varphi) \right] \left(\sum_{\varphi=1}^q \xi_\varphi \right) \left[\sum_{\varphi=1}^q (\xi_\varphi + l_\varphi + t_\varphi) \right].$$

Die letzte Umformung gilt deshalb, weil

$$(N) \quad (\xi_\varphi + r_\varphi + t_\varphi) \xi_\lambda (\xi_\tau + l_\tau + t_\tau) = 0 \text{ ist, falls nicht}$$

$\varphi = \lambda = \tau$ ist.

Setzt man $u = \sum_{\varphi=1}^q (\xi_\varphi + l_\varphi + t_\varphi)$, so ist wegen (R)

$u \cdot \sum_{\varphi=1}^q (\xi_\varphi + r_\varphi + t_\varphi) = \xi_0$. Also existiert u^{-1} und es ist

$u^{-1} = \sum_{\varphi=1}^q (\xi_\varphi + r_\varphi + t_\varphi)$. Wegen (N) folgt

$$u^{-1} \cdot \xi_\varphi \cdot u = \xi_\varphi \quad \text{oder} \quad u \cdot \xi_\varphi \cdot u^{-1} = \xi_\varphi \quad (\varphi = 1, 2, \dots, q),$$

womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

4. Verschränkte Produkte

1. Starke Isomorphismen:

Es sei $\mathcal{A}$ eine einfache Algebra. Unter ihrer Länge m verstehen wir die Anzahl von einfachen Linksidealen, deren direkte Summe $\mathcal{A}$ ist. Eine einfache Teilalgebra $\mathcal{L}$ von $\mathcal{A}$ heißt stark einfach, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ sind ähnlich (d.h. die zugehörigen Schiefkörper sind isomorph).
- 2) Das Linksideal $\mathcal{A}\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$ hat die gleiche Länge wie $\mathcal{L}$.

Einen Isomorphismus ω einer einfachen Algebra $\mathcal{L}$ in eine einfache Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir stark, wenn das Bild $\omega(\mathcal{L})$ in $\mathcal{A}$ eine stark einfache Teilalgebra von $\mathcal{A}$ ist.

Die starken Isomorphismen gewinnen ihre Bedeutung aus den folgenden beiden Hilfssätzen.

Hilfssatz 1: Ist ω ein starker Isomorphismus von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$, so sind die beiden Algebren $\mathcal{L}$ und $\mathcal{A}$ ähnlich. Der beiden Algebren zugeordnete Schiefkörper sei K . Ist dann $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L})$ eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{L}$ in K , so existiert immer eine irreduzible Darstellung $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$, so daß

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}}(\omega(b)) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{\mathcal{L}}(b) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für jedes } b \in \mathcal{L} \text{ gilt.}$$

Beweis: Eine beliebige irreduzible Darstellung $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ ergibt gleichzeitig eine Darstellung von $\mathcal{L}$, wenn man $b \in \mathcal{L}$ die Darstellungsmatrix $\mathcal{I}(\omega(b))$ zuordnet. Dann existiert eine Ähnlichkeitstransformation Q , so daß

$$Q \cdot \mathcal{I}(\omega(\mathcal{L})) \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^1(\mathcal{L}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^2(\mathcal{L}) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^m(\mathcal{L}) & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{wird. Dabei sind} \\ \text{die } \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^i(\mathcal{L}) \text{ zu } \mathcal{I}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}) \\ \text{ähnlich, da es nur} \end{array}$$

eine Klasse von irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{L}$ in K gibt. Kame in der Hauptdiagonale die Matrix $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ mehr als einmal vor, so wäre die Länge $\mathcal{A} \cdot \omega(\mathcal{L})$ (also die Anzahl von einfachen Links-idealen, deren direkte Summe dieses Ideal ist) größer als die Länge von $\mathcal{L}$, nämlich ein Vielfaches davon. Daher können wir $\mathcal{D}_\mathcal{A} = Q \cdot \mathcal{D} \cdot Q^{-1}$ setzen.

Hilfssatz 2: Es seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ ähnliche einfache Algebren. Die Länge von $\mathcal{A}_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$) sei m_ϱ und der diesen Algebren zugeordnete gemeinsame Schiefkörper sei K .

a) Dann existiert ein System von starken Isomorphismen $\{\omega_{\varrho\tau}\}$ ($\varrho, \tau = 1, 2, \dots, p$) mit folgenden Eigenschaften:

1) $\omega_{\varrho\tau}$ ist, falls $m_\varrho \geq m_\tau$ ist, ein starker Isomorphismus von $\mathcal{A}_\tau$ in $\mathcal{A}_\varrho$.

2) $\omega_{\varrho\tau}$ und $\omega_{\tau\varrho}$ sind invers zueinander.

3) Es gilt für beliebiges $\varrho, \tau, \lambda = 1, \dots, p$: $\omega_{\varrho\tau} \cdot \omega_{\tau\lambda} = \omega_{\varrho\lambda}$.

b) Ist $\{\omega'_{\varrho\tau}\}$ ($\varrho, \tau = 1, 2, \dots, p$) ein zweites System von starken Isomorphismen mit den Eigenschaften 1 - 3, so existieren innere Automorphismen Θ_ϱ von $\mathcal{A}_\varrho$, derart, daß für jedes ϱ, τ gilt:

$$\omega'_{\varrho\tau} = \Theta_\varrho^{-1} \omega_{\varrho\tau} \Theta_\tau.$$

Beweis: a) Wir numerieren die $\mathcal{A}_\varrho$ derart um, daß für die Längen m_ϱ gilt: $m_{\varrho+1} \leq m_\varrho$. Dann existieren zunächst die starken Isomorphismen $\omega_{\varrho, \varrho+1}$. Denn $\mathcal{A}_\varrho$ läßt sich als voller Matrixring vom Grad m_ϱ mit Koeffizienten aus K darstellen. Es sei $\mathcal{D}_\varrho$ ($\varrho = 1, \dots, p$) eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}_\varrho$. Wir definieren $\omega_{\varrho, \varrho+1}$ durch:

$$\mathcal{D}_\varrho(\omega_{\varrho, \varrho+1}(a)) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\varrho+1}(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } a \in \mathcal{A}_{\varrho+1}.$$

Das Bild von $\mathcal{A}_{\varrho+1}$ in $\mathcal{A}_\varrho$ ist ein starker Unterring von $\mathcal{A}_\varrho$, wie aus der Darstellung $\mathcal{D}_\varrho$ ersichtlich ist. Also ist $\omega_{\varrho, \varrho+1}$ ein starker Isomorphismus. Aus den Isomorphismen $\omega_{\varrho, \varrho+1}$ ($\varrho = 1, \dots, p-1$) läßt sich $\omega_{\varrho\tau}$ ($\tau > \varrho$) wegen (3) ausrechnen: $\omega_{\varrho, \varrho+1} \cdots \omega_{\tau-1, \tau} = \omega_{\varrho\tau}$,

und dieser Isomorphismus ist auch stark. $\omega_{\tau\varrho}$ ist dann nach (2) ebenfalls definiert. Eine nochmalige Umnummerierung der α_ϱ in die alte Reihenfolge ändert dann an dem Bestehen der Eigenschaften 1 - 3 nichts mehr.

Zum Beweis von (b) behalten wir aber die Numerierung, für welche $m_{\varrho,\tau} \leq m_\varrho$ gilt, noch bei. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}'_p$ eine beliebige irreduzible Darstellung von α_p in K ; mit $\mathcal{D}'_{p-1}$ eine solche von α_{p-1} , daß für jedes $a \in \alpha_p$ gilt:

$$\mathcal{D}'_{p-1}(\omega'_{p-1,p}(a)) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}'_p(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein solches $\mathcal{D}'_{p-1}$ existiert nach Hilfssatz 1. Mit $\mathcal{D}'_{p-2}$ fortfahrend, können wir weiter schrittweise solche Darstellungen $\mathcal{D}'_\varrho$ gewinnen, daß für jedes $a \in \alpha_\varrho$ gilt:

$$(D) \quad \mathcal{D}'_\varrho(\omega'_{\varrho-1,\varrho}(a)) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}'_\varrho(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\varrho = p, \dots, 2)$$

Mit $\mathcal{D}_\varrho$ bezeichnen wir ein in Bezug auf $\omega_{\varrho\tau}$ analog konstruiertes System von Darstellungen. Es existieren dann Transformationen Q_ϱ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$), so daß $\mathcal{D}'_\varrho = Q_\varrho \mathcal{D}_\varrho \cdot Q_\varrho^{-1}$ wird. Man kann dies auch so ausdrücken: In α_ϱ gibt es nicht singuläre Elemente q_ϱ , so daß für jedes $a \in \alpha_\varrho$ gilt:

$$\mathcal{D}'_\varrho(a) = \mathcal{D}_\varrho(q_\varrho \cdot a \cdot q_\varrho^{-1}) \quad (\varrho = 1, 2, \dots, p).$$

Setzt man dies in (D) ein, so erhält man

$$\mathcal{D}'_{\varrho-1}(q_{\varrho-1} \cdot \omega'_{\varrho-1,\varrho}(a) \cdot q_{\varrho-1}^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\varrho(q_\varrho \cdot a \cdot q_\varrho^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt nach Konstruktion der $\mathcal{D}_\varrho$:

$$q_{\varrho-1} \cdot \omega'_{\varrho-1,\varrho}(a) \cdot q_{\varrho-1}^{-1} = \omega_{\varrho-1,\varrho}(q_\varrho \cdot a \cdot q_\varrho^{-1}).$$

Bezeichnet man den Automorphismus $a \rightarrow q_\varrho \cdot a \cdot q_\varrho^{-1}$ von α_ϱ mit Θ_ϱ , so folgt aus der letzten Gleichung

$$\Theta_{\varrho-1} \cdot \omega'_{\varrho-1,\varrho} = \omega_{\varrho-1,\varrho} \Theta_\varrho, \text{ also } \omega'_{\varrho-1,\varrho} = \Theta_{\varrho-1}^{-1} \cdot \omega_{\varrho-1,\varrho} \Theta_\varrho.$$

Wendet man die Eigenschaft (3) an, so folgt die Behauptung (b).

2. Definition der verschränkten Produkte:

Es sei $\mathcal{H}$ eine halbeinfache Algebra, direkte Summe von einfachen Algebren $\mathcal{A}_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$). Die einfachen Komponenten seien einander ähnlich; d.h. volle Matrixringe vom Grad m_ϱ in ein und demselben Schiefkörper K mit dem Zentrum Z . Weiter sei eine Algebra $\mathcal{f}$ über dem Koeffizientenkörper Z gegeben und eine Signierung S derselben mit den Nummern $1, 2, \dots, p$.

Falls $m_\varrho \geq m_\tau$ ist, definieren wir:

$\ell_{\varrho\tau}$ als das kleinste $\omega_{\varrho\tau}(\mathcal{A}_\tau)$ umfassende Linksideal in $\mathcal{A}_\varrho$,
 $\kappa_{\tau\varrho}$ als das kleinste $\omega_{\tau\varrho}(\mathcal{A}_\tau)$ umfassende Rechtsideal in $\mathcal{A}_\varrho$.
 ($\ell_{\varrho\tau}$ und $\kappa_{\tau\varrho}$ sind also nur für solche Indexpaare ϱ, τ erklärt, für welche $m_\varrho \geq m_\tau$ ist.)

Wir erklären nun das verschränkte Produkt $(\mathcal{f}, S, \mathcal{H})$. Seine Elemente haben die Gestalt:

$$r = \sum a_i * k_i + \sum k_i^* a_i .$$

Dabei sind die Summen immer endlich. Die k_i sind primitive Elemente aus $\mathcal{f}$ (vgl. 3.2.). Die Bedeutung des Sternes links oder rechts von k ist folgende:

Es sei $S(k) = (\varrho\tau)$. Steht der Stern links, so soll das heißen $m_\varrho \geq m_\tau$; steht er aber rechts, dann bedeutet das: $m_\varrho < m_\tau$.

Über die Koeffizienten a_i der k_i verfügen wir so:

1) Der Koeffizient steht auf der Sternseite.

2) Ist $S(*k_i) = (\varrho\tau)$, so ist $a_i \in \ell_{\varrho\tau} \subseteq \mathcal{A}_\varrho$.

Ist $S(k_i^*) = (\sigma\lambda)$, so ist $a_i \in \kappa_{\sigma\lambda} \subseteq \mathcal{A}_\lambda$.

Für die Elemente des verschränkten Produktes legen wir folgende Rechenregeln fest:

1) Durchgehende Verknüpftheit mit Z (= Zentrum von K); d.h.

für jedes $\alpha \in Z$ gilt $a^*(k\alpha) = (\alpha a)^* k$ bzw. $(k\alpha)^* a = k^*(\alpha a)$.

2) Linke und rechte Distributivität in drei Hinsichten:

$(a_1 + a_2) * k = a_1 * k + a_2 * k$ wenn a_1 und a_2 aus dem gleichen Linksideal $\ell_{\varrho\tau}$ wie $a_1 + a_2$ stammen. Analoge Distributivität gelte auch für rechts stehende Koeffizienten.

Ferner gelte auch Distributivität hinsichtlich der k :

$a * (k_1 + k_2) = a * k_1 + a * k_2$ und ebenso für rechte Koeff.

Dabei ist $S(k_1) = S(k_2) = S(k_1 + k_2)$ vorausgesetzt.

Schließlich gelte in $(\mathfrak{f}, S, \mathfrak{h})$ selbst die übliche linke und rechte Distributivität.

3) Multiplikationsregeln: Wegen der letztgenannten Distributivität genügt es, Produkte aus Faktoren $a * k$ und $k * a$

zu erklären. Es sind vier verschiedene Fälle möglich:

$$a) \quad r_1 r_2 = (a_1 * k_1)(a_2 * k_2) \quad b) \quad r_1 r_2 = (k_1 * a_1)(k_2 * a_2)$$

$$c) \quad r_1 r_2 = (a_1 * k_1)(k_2 * a_2) \quad d) \quad r_1 r_2 = (k_1 * a_1)(a_2 * k_2)$$

Allgemein setzen wir fest, daß diese Produkte Null sein sollen, falls $k_1 k_2 = 0$ ist. Wenn $k_1 k_2 \neq 0$ ist, so ist $S(k_1 k_2) = S(k_1) \wedge S(k_2)$ und daher das Produkt wieder primitiv (3.2.). Wir dürfen dann in den Produkten $r_1 r_2$ die Klammern weglassen und sie unter Anwendung folgender formaler Vertauschungsrelationen auf die Form $a * (k_1 k_2)$ bzw. $(k_1 k_2) * a$ bringen:

$$\begin{aligned} (V_{\varrho\tau}) \quad & *k \cdot a = \omega_{\varrho\tau}(a) * k & (\text{falls } S(k) = (\varrho\tau)). \\ & a \cdot k * = k * \omega_{\tau\varrho}(a) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Vertauschungsrelationen gelingt es eindeutig, die obigen Produkte auf die Form $a * k$ oder $k * a$ zurückzuführen.

Wir zeigen dies nur an einem Beispiel, dem Produkt

$p = (a_1 * k_1)(a_2 * k_2)$. Wir nehmen an: $S(k_1) = (\varrho\tau)$, $S(k_2) = (\tau\lambda)$.

Es ist $*k_1 * k_2 = *k$. Anwendung von $(V_{\varrho\tau})$ ergibt:

$p = a_1 \omega_{\tau}(a_2)^{*k} = a^{*k}$. Wegen $S(*k) = (\tau\lambda)$ wäre nachzu-
prüfen, ob $a \in \ell_{\tau\lambda}$ ist. Es ist $a_2 \in \ell_{\tau\lambda}$, also
 $a \in a_1 \omega_{\tau}(\ell_{\tau\lambda}) \subseteq a_1 \ell_{\tau\lambda} \subseteq \ell_{\tau\lambda}$. In den übrigen Fällen ist
die Rechnung ähnlich.

3. Struktur der verschränkten Produkte:

Satz 1: (f, S, η) ist eine assoziative Algebra mit endlicher
Basis über Z .

Beweis: Die Existenz einer endlichen Basis folgt aus der
durchgehenden Verknüpftheit mit Z und der Distributivität
hinsichtlich k und a (vgl. 4.2. 1 u. 2).

Um die Assoziativität zu zeigen, greifen wir wieder nur ei-
nen der möglichen Fälle heraus. In den anderen Fällen ist
die Rechnung ähnlich.

Für $S(k_1) = (\tau\tau)$, $S(k_2) = (\tau\lambda)$, $S(k_3) = (\lambda\lambda)$ berechnen wir
auf zwei verschiedene Arten das Produkt $(a_1^{*k_1})(a_2^{*k_2})(a_3^{*k_3})$
und vergleichen die Ergebnisse.

$$\begin{aligned} [(a_1^{*k_1})(a_2^{*k_2})](a_3^{*k_3}) &= (a_1 \omega_{\tau}(a_2)^{*k_1 k_2})(a_3^{*k_3}) = \\ &= a_1 \omega_{\tau}(a_2) \omega_{\tau}(a_3)^{*k_1 k_2 k_3} . \\ (a_1^{*k_1})[(a_2^{*k_2})(a_3^{*k_3})] &= (a_1^{*k_1})(a_2 \omega_{\tau\lambda}(a_3)^{*k_2 k_3}) = \\ &= a_1 \omega_{\tau}(a_2 \omega_{\tau\lambda}(a_3))^{*k_1 k_2 k_3} . \end{aligned}$$

Wegen $\omega_{\tau}(a_2 \omega_{\tau\lambda}(a_3)) = \omega_{\tau}(a_2) \omega_{\tau}(\omega_{\tau\lambda}(a_3)) = \omega_{\tau}(a_2) \omega_{\tau\lambda}(a_3)$
sind die beiden Ergebnisse gleich. Für die Assoziativität
ist also die Eigenschaft (3) des Isomorphismensystemes
wesentlich.

In die Definition von (f, S, η) gingen außer f , S und η
noch die Isomorphismen $\{\omega_{\tau}\}$ ein, so daß man das verschränkte
Produkt streng genommen mit $(f, S, \eta, \omega_{\tau})$ bezeichnen müßte.
Wir lassen aber die Angabe des Isomorphismensystemes weg.
Dazu berechtigt uns der folgende

Satz 2: a) Ist $\{\omega'_{\xi\tau}\}$ ein zweites System von Isomorphismen mit den Eigenschaften 1 - 3, so sind $\mathcal{R} = (f, S, \mathcal{H}, \omega_{\xi\tau})$ und $\mathcal{R}' = (f, S, \mathcal{H}, \omega'_{\xi\tau})$ isomorph.

b) Das verschränkte Produkt hängt nur von der Signierungsklasse von f ab. Sind S und S^6 konjugiert, so ist $(f, S, \mathcal{H}) \cong (f, S^6, \mathcal{H})$.

Anmerkung: Besitzt f eine Einheit, so gibt es nur eine endliche Anzahl von Signierungsklassen von f (3.4.). Zu den Faktoren f und $\mathcal{H}$ gibt es dann nur eine endliche Anzahl von nicht isomorphen verschränkten Produkten (Endlichkeitssatz).

Beweis: a) Das Isomorphismensystem $\omega'_{\xi\tau}$ definiert zunächst neue Links- und Rechtsideale $\ell'_{\xi\tau}$ und $\kappa'_{\tau\lambda}$ in $\mathcal{H}$. Wegen $\omega'_{\xi\tau} = \Theta_{\xi}^{-1} \omega_{\xi\tau} \Theta_{\tau}$ (4.1.) ist $\ell'_{\xi\tau} = \Theta_{\xi}^{-1}(\ell_{\xi\tau})$ und $\kappa'_{\tau\lambda} = \Theta_{\lambda}^{-1}(\kappa_{\tau\lambda})$. Eine Isomorphie zwischen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ läßt sich so herstellen: Für $S(*k_1) = (\xi\tau)$ bzw. $S(k_2^*) = (\tau\lambda)$ ordnen wir

$a_1 * k_1$ in $\mathcal{R}$ das Element $\Theta_{\xi}^{-1}(a_1) * k_1$ in $\mathcal{R}'$ bzw.

$k_2^* a_2$ in $\mathcal{R}$ das Element $k_2^* \Theta_{\lambda}^{-1}(a_2)$ in $\mathcal{R}'$ zu.

Diese Zuordnung gibt eine Isomorphie. Wir zeigen dies nur für das Produkt $(a_1 * k_1)(k_2^* a_2) = a_1 \omega_{\xi\lambda}(a_2) * k_1 k_2$, dem in $\mathcal{R}'$ $\Theta_{\xi}^{-1}(a_1 \omega_{\xi\lambda}(a_2)) * k_1 k_2$ zugeordnet ist. Andererseits ist $\Theta_{\xi}^{-1}(a_1) * k_1 \cdot k_2^* \Theta_{\lambda}^{-1}(a_2) = \Theta_{\xi}^{-1}(a_1) \omega'_{\xi\lambda}(\Theta_{\lambda}^{-1}(a_2)) * k_1 k_2 =$
 $= \Theta_{\xi}^{-1}(a_1) \cdot \Theta_{\xi}^{-1}(\omega_{\xi\lambda}(a_2)) * k_1 k_2 = \Theta_{\xi}^{-1}(a_1 \omega_{\xi\lambda}(a_2)) * k_1 k_2$.
 Also stimmt das Bild des Produktes überein mit dem Produkt der Bilder.

b) Daß die verschränkten Produkte $\mathcal{R} = (f, S, \mathcal{H})$ und $\mathcal{R}' = (f, S^6, \mathcal{H})$ isomorph sind, zeigt die Zuordnung

$$a * k \in \mathcal{R} \rightarrow a * k^6 \in \mathcal{R}' \quad \text{bzw.} \quad k^6 * a \in \mathcal{R}'$$

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Verschränkte Produkte $(f, S, \mathcal{H})$ sind eine Verallgemeinerung von direkten Produkten. Ist nämlich S die identische Signie-

rung von f ($S(k) = (11)$ für jedes $k \in f$) und ist $\mathcal{H}$ insbeson-
 dere eine einfache Algebra über Z , so hat man in $\mathcal{H}$ nur einen
 Isomorphismus ω_{11} , der jedes Element auf sich abbildet;
 ferner ist $\ell_{11} = \kappa_{11} = \mathcal{H}$. Es gilt dann $ak = ka$ für je-
 des $a \in \mathcal{H}$ und $k \in f$. In diesem Fall ist also $(f, S, \mathcal{H}) = f \otimes_Z \mathcal{H}$.
 Nach 2.11. ist das direkte Produkt zweier einfacher Algebren
 wieder einfach, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren
 über Z normal ist. Unsere verschränkten Produkte erfüllen
 aus ihrer Definition diese Normalitätsbedingung, wenn $\mathcal{H}$
 einfach ist. Denn wir setzten voraus, daß Z , der Koeffizien-
 tenkörper von f , gleichzeitig das Zentrum von K sein sollte.
 Es ist daher nicht verwunderlich, daß man den Satz von 2.11.
 auf verschränkte Produkte übertragen kann.

Satz 3: a) Falls f eine Einheit ε enthält, ist in $(f, S, \mathcal{H})$
 ein zu $\mathcal{H}$ homomorpher Teilring $\bar{\mathcal{H}}$ enthalten.

b) Ist $\mathcal{U}$ ein zweiseitiges Ideal in $(f, S, \mathcal{H})$ und
 enthält f eine Einheit, so gibt es in f ein zweiseitiges
 Ideal $\mathcal{K}$, so daß $\mathcal{U}$ verschränktes Produkt von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{H}$ wird:
 $\mathcal{U} = (\mathcal{K}, S_{\mathcal{K}}, \mathcal{H})$. $S_{\mathcal{K}}$ bedeutet dabei die Beschränkung der
 Signierung S auf $\mathcal{K}$, deren Komplexaufspaltung man erhält,
 wenn man die Komplexe der zu S gehörigen Aufspaltung von
 f zum Durchschnitt bringt mit $\mathcal{K}$.

c) $\mathcal{U}$ ist dann und nur dann nilpotent, wenn $\mathcal{K}$ nil-
 potent ist. Ist $\mathcal{K}^{\delta} = (0)$, aber $\mathcal{K}^{\delta-1} \neq (0)$, so ist auch $\mathcal{U}^{\delta} = (0)$
 und $\mathcal{U}^{\delta-1} \neq (0)$.

Folgerungen: $(f, S, \mathcal{H})$ besitzt das Radikal (0) , wenn und
 nur wenn das Radikal von f Null ist (f mit Einheit). Ist
 $\mathcal{A}$ das Radikal von f , so ist $(\mathcal{A}, S, \mathcal{H})$ das Radikal von $(f, S, \mathcal{H})$.
 Ist insbesondere f einfach, so ist auch $(f, S, \mathcal{H})$ einfach.

Beweis: a) Es seien ε_ϱ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$) die zu S gehörigen Idempotente in $\mathcal{H}$. Ist ε_ϱ von Null verschieden, so erhalten wir durch $\bar{A}_\varrho = \{a \varepsilon_\varrho; a \in A_\varrho\}$ einen zu A_ϱ isomorphen Teilring des verschränkten Produktes. Für $\bar{\mathcal{H}}$ nehmen wir die direkte Summe der $\bar{A}_\varrho$. Der so konstruierte Teilring $\bar{\mathcal{H}}$ ist allerdings nicht der einzige zu $\mathcal{H}$ homomorphe in $(\mathcal{H}, S, \mathcal{H})$ (vgl. Ergänzungssatz 5.6.).

b) Zum Beweis von (b) benötigen wir zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 3: $\mathcal{A}$ ist als zweiseitiger $\bar{\mathcal{H}}$ -Modul vollreduzibel.

Beweis: $\mathcal{A}$ ist Summe, daher auch direkte Summe einer endlichen Anzahl von einfachen $\bar{\mathcal{H}}$ -Moduln $\mathcal{F}$ der Form

$$\mathcal{F} = \{a^* k; a \in \mathcal{L}_{\varrho\tau}\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F} = \{k^* a; a \in \mathcal{A}_\tau\}$$

Die Einfachheit dieser zweiseitigen $\bar{\mathcal{H}}$ -Moduln folgt aus

$$b^* \varepsilon_\varrho \cdot a^* k \cdot c^* \varepsilon_\tau = b \cdot a \cdot \omega_{\varrho\tau}(c)^* k$$

wenn man bedenkt, daß $\mathcal{L}_{\varrho\tau}$ ein einfacher A_ϱ -links- $\omega_{\varrho\tau}(A_\tau)$ -rechts-Modul ist.

Hilfssatz 4: Die Einheit in A_ϱ sei e_ϱ . Wir setzen (für $m_\varrho \geq m_\tau$) $e_{\varrho\tau} = \omega_{\varrho\tau}(e_\tau)$. Dann sind die Elemente $z \cdot e_{\varrho\tau} \in \mathcal{L}_{\varrho\tau}$ gekennzeichnet durch die Vertauschungsrelation

$$(V) \quad a \cdot x = x \cdot a \quad \text{für jedes } a \in \omega_{\varrho\tau}(A_\tau).$$

D.h. jedes Element $x \in \mathcal{L}_{\varrho\tau}$, welches (V) genügt, hat die Form $x = \alpha e_{\varrho\tau}$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Wir wählen (nach Hilfssatz 1) Darstellungen $\mathcal{V}_\varrho$ und $\mathcal{V}_\tau$, so daß $\mathcal{V}_\varrho(\omega_{\varrho\tau}(a)) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_\tau(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wird für jedes $a \in A_\tau$. Dann ist (*): $\mathcal{V}_\varrho(x) = \begin{pmatrix} X_{\tau\tau} & 0 \\ Y_{\varrho\varrho} & 0 \end{pmatrix}$. Schreibt man die Relation (V) in der Darstellung $\mathcal{V}_\varrho$, so gilt für jedes $A_{\tau\tau}$:

(*) : Die Indizes $(\varrho\tau)$ bedeuten hier, wie im Folgenden, daß die Matrix vom Typus $(m_\varrho m_\tau)$ ist.

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{Y}} \begin{pmatrix} X_{\tau\tau} & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{Y}} = \begin{pmatrix} X_{\tau\tau} & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{Y}} \begin{pmatrix} \Lambda_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{Y}}.$$

Daraus folgt $Y = 0$ und $X_{\tau\tau} = \alpha E_{\tau\tau} (\alpha \in Z)$. Also ist

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{Y}}(x) = \begin{pmatrix} \alpha E_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{\mathfrak{Y}}(\omega_{\tau\tau}(\alpha e_{\tau})) \text{ und } x = \alpha e_{\tau}.$$

Wir können nun die Behauptung (b) beweisen. Jedes zweiseitige Ideal in $\mathcal{A}$ ist gleichzeitig zweiseitiger $\bar{\mathfrak{J}}$ -Modul, also direkte Summe von einfachen $\bar{\mathfrak{J}}$ -Moduln $\bar{\mathfrak{J}}_i$ (volle Reduzibilität, Hilfssatz 3). Es sei $\bar{\mathfrak{J}}$ ein solcher und $r = \sum_{i=1}^q a_1^* k_1 + \sum_{i=q+1}^s k_1^* a_1$ ein von Null verschiedenes Element desselben. Ist $S(k_1) = (\mathfrak{J}\tau)$ und $a_1^* k_1 \neq 0$, so ist $\bar{a}_{\mathfrak{Y}} \cdot r \cdot \bar{a}_{\mathfrak{Z}}$ ein von Null verschiedener Teilmodul von $\bar{\mathfrak{J}}$, also mit $\bar{\mathfrak{J}}$ identisch. Daraus folgt $\sum_{i=q+1}^s k_1^* a_1 = 0$ und $S(k_1) = (\mathfrak{J}\tau)$ für $i = 1, 2, \dots, q$. Jedes $r \in \bar{\mathfrak{J}}$ kann man in der Form $r = \sum_{i=1}^q x_i^* k_1$ mit $x_i \in \mathcal{L}_{\mathfrak{Y}\tau}$ schreiben. Aus $x_1 = 0$ folgt dabei $r = 0$, weil alle Elemente in $\bar{\mathfrak{J}}$ mit dieser Eigenschaft einen echten Teilmodul bilden, der wegen der Einfachheit von $\bar{\mathfrak{J}}$ nur die Null enthält.

Da $\mathcal{L}_{\mathfrak{Y}\tau}$ ein einfacher $\mathcal{A}_{\mathfrak{Y}}$ -links- $\omega_{\mathfrak{Y}\tau}(\mathcal{A}_{\mathfrak{Z}})$ -rechts-Modul ist, existiert ein $\bar{r} \in \bar{\mathfrak{J}}$: $\bar{r} = e_{\mathfrak{Y}\tau}^* k_1 + \sum_{i=2}^q x_i^* k_1$. Dieses erfüllt die Vertauschungsrelation

$$(V_{\mathfrak{Y}\tau}) \quad \bar{r} \cdot (a^* \xi_{\mathfrak{Z}}) = (\omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* \xi_{\mathfrak{Z}}) \cdot \bar{r} \quad \text{für jedes } a \in \mathcal{A}_{\mathfrak{Z}}.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \bar{r} \cdot (a^* \xi_{\mathfrak{Z}}) &= (e_{\mathfrak{Y}\tau}^* k_1)(a^* \xi_{\mathfrak{Z}}) + \left(\sum_{i=2}^q x_i^* k_1 \right) (a^* \xi_{\mathfrak{Z}}) = \\ &= \omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* k_1 + \sum_{i=2}^q x_i \cdot \omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* k_1, \\ (\omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* \xi_{\mathfrak{Z}}) \cdot \bar{r} &= (\omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* \xi_{\mathfrak{Z}})(e_{\mathfrak{Y}\tau}^* k_1) + (\omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* \xi_{\mathfrak{Z}}) \left(\sum_{i=2}^q x_i^* k_1 \right) = \\ &= \omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* k_1 + \sum_{i=2}^q \omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a) \cdot x_i^* k_1. \end{aligned}$$

Für $\bar{r} \cdot (a^* \xi_{\mathfrak{Z}}) - (\omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a)^* \xi_{\mathfrak{Z}}) \cdot \bar{r} \in \bar{\mathfrak{J}}$ ist offenbar der Koeffizient von k_1 gleich Null; daraus folgt nach obiger Bemerkung die Relation $(V_{\mathfrak{Y}\tau})$. Weiter folgt aus den beiden letzten Gleichungen durch Koeffizientenvergleich:

$$x_i \cdot \omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a) = \omega_{\mathfrak{Y}\tau}(a) \cdot x_i \quad (i = 2, 3, \dots, q), \quad a \in \mathcal{A}_{\mathfrak{Z}}, \text{ oder}$$

$$x_i \cdot a = a \cdot x_i \quad \text{für jedes } a \in \omega_{\tau}(\alpha_{\tau}).$$

Da die x_i aus ℓ_{τ} sind, folgt aus dem Hilfssatz 4: $x_i = \alpha_i e_{\tau}$ mit $\alpha_i \in Z$. Es gilt dann:

$$\bar{r} = e_{\tau} * k_1 + \sum_{i=1}^q e_{\tau} \alpha_i * k_i = e_{\tau} (*k_1 + \sum_{i=1}^q \alpha_i * k_i) = e_{\tau} * k.$$

Also besteht der Modul $\bar{f}$ aus den Elementen $\{a * k; a \in \ell_{\tau}\}$.

Auf diese Weise führt jeder der Moduln $\bar{f}_i$, deren direkte Summe $\mathcal{U}$ ist, zu einem $*k_i$ bzw. k_i^* , derart, daß

$$\bar{f}_i = \{a * k_i; a \in \ell\} \quad \text{bzw.} \quad \bar{f}_i = \{k_i^* a; a \in \mathcal{U}\} \text{ ist.}$$

Die k_i sind bis auf Vielfache aus Z eindeutig bestimmt, falls die Summenzerlegung $\mathcal{U} = \sum_{i=1}^t \bar{f}_i$ vorgegeben ist. Der von den k aufgespannte Z -Modul ist ein zweiseitiges Ideal $\mathcal{K}$ in $\mathcal{f}$ und es gilt $\mathcal{U} = (\mathcal{K}, S_{\mathcal{K}}, \mathcal{H})$.

c) $\mathcal{f}$ enthalte die Einheit und es sei $\mathcal{U} = (\mathcal{K}, S_{\mathcal{K}}, \mathcal{H})$. Jedes Element von $\mathcal{U}^6$ ist Summe von Ausdrücken der Form

$$a_1 a_2 \dots a_6 * k_1 k_2 \dots k_6 \quad \text{bzw.} \quad k_1 k_2 \dots k_6^* a_1 a_2 \dots a_6.$$

Da $\mathcal{f}$ eine Einheit enthält, existiert der Teilring $\bar{\mathcal{H}}$ und $\mathcal{U}^6$ ist ein zweiseitiger $\bar{\mathcal{H}}$ -Modul. Daher durchlaufen die Koeffizienten $a_1 a_2 \dots a_6$ die vollen Links- bzw. Rechtsideale ℓ_{τ} bzw. $\mathcal{K}_{\mathcal{K}}$. Die Ausdrücke $\sum k_1 k_2 \dots k_6$ bilden gerade $\mathcal{K}^6$. Also ist $\mathcal{U}^6 = (\mathcal{K}^6, S_{\mathcal{K}^6}, \mathcal{H})$. Daraus folgt (c).

Eine besondere Rolle spielen verschränkte Produkte der folgenden Art. $\tilde{\mathcal{K}}$ ist eine nilpotente Algebra über Z mit der Signierung S . Wir setzen $\mathcal{f} = \tilde{\mathcal{A}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$, wobei die ξ_q die zur Signierung gehörigen Idempotente sind. Dann ist

$\mathcal{U} = (\mathcal{f}, S, \mathcal{H})$ eine Algebra über Z mit dem Radikal $\mathcal{R} = (\tilde{\mathcal{A}}, S, \mathcal{H})$; der Restklassenring $\mathcal{U}/\mathcal{R}$ ist isomorph zu $\mathcal{H}$. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß jede Algebra über Z ein solches verschränktes Produkt ist, wenn die einfachen Bestandteile von $\mathcal{U}/\mathcal{R} = \mathcal{H}$ einander ähnlich sind.

5. Haupt- und Ergänzungssatz

Voraussetzungen: Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über dem Koeffizientenkörper Z mit der Einheit e und dem Radikal $\mathcal{N}$. Sind die Zentren der einfachen Bestandteile von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ separabel über Z , so wird $\mathcal{A}$ eine direkte Summe des Radikals und eines zu $\mathcal{A}/\mathcal{N} = \mathcal{H}$ isomorphen Teiltringes $\bar{\mathcal{H}}$: $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{N}$.

Wir brauchen für das folgende noch stärkere Voraussetzungen:

Es seien die einfachen Bestandteile von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, und damit auch die von $\bar{\mathcal{H}}$, ähnliche, über Z normale Algebren. Die einfachen Komponenten $\bar{\mathcal{A}}_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$) von $\bar{\mathcal{H}}$ lassen sich also darstellen als volle Matrixringe vom Grade m_ϱ in ein und demselben Schiefkörper K mit dem Zentrum Z .

Anmerkung: Unsere Voraussetzung ist für jede Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper erfüllt; dann wird $K = Z$. Eine beliebige Algebra $\mathcal{A}$ läßt sich immer in eine Algebra einbetten, für welche die Voraussetzungen erfüllt sind, wenn wenigstens die einfachen Bestandteile von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ über P separabel sind. Denn dann existiert ein Zerfällungskörper $Z|P$ (algebraischer Erweiterungskörper endlichen Grades über P), derart, daß $\mathcal{A}_Z$ die obigen Voraussetzungen erfüllt, wenn man Z als neuen Koeffizientenkörper auffaßt.

Kurzer Überblick: Es wird nun folgendes bewiesen:

- (1.) Die Algebra $\mathcal{A}$ ist als zweiseitiger $\bar{\mathcal{H}}$ -Modul vollreduzibel.
- (2.) Dann wird eine Komplexaufspaltung $\sum^\oplus \mathcal{A}_{\varrho\tau}$ von $\mathcal{A}$ angegeben, welche zu einer Signierung der Algebra gehört. Alle in einem festen Komplex $\mathcal{A}_{\varrho\tau}$ enthaltenen einfachen zweiseitigen $\bar{\mathcal{H}}$ -Moduln $\mathcal{F}$ sind untereinander $\bar{\mathcal{H}}$ -operatorisomorph und gestatten

- (3.) eine Partialdarstellung $\mathcal{P}$; d.h. eine $\bar{\mathcal{H}}$ -operatorisomorphe Abbildung auf den Bereich rechteckiger Matrizen vom Typus (m, m_T) mit Koeffizienten aus K .
- (4.) Ist $\mathcal{R} = \sum^{\oplus} \mathcal{F}_i$ eine Zerlegung von $\mathcal{R}$ in einfache zweiseitige $\bar{\mathcal{H}}$ -Moduln, so sind die Partialdarstellungen $\mathcal{P}_i$ (von $\mathcal{F}_i$) durch eine gewisse Relation miteinander verknüpft. Durch diese wird ein Zahlenschema $\alpha_{ij}^k \in \mathbb{Z}$ festgelegt, welches
- (5.) als Faktorensystem einer assoziativen Algebra $f | \mathbb{Z}$ aufgefaßt werden kann. Es gibt eine Signierung S in f , so daß $\mathcal{R} \cong (f, S, \mathcal{H})$ wird. Weiter wird bewiesen, daß "der Kern f " nur von der Aufspaltungsklasse $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{K}$ abhängt, also zwei solche Aufspaltungen zum gleichen Kern führen, wenn sie durch einen Automorphismus von $\mathcal{R}$ auseinander hervorgehen.
- (6.) Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen existiert nur eine Aufspaltungsklasse von $\mathcal{R}$ (Ergänzungssatz).

1. Die Vollreduzibilität von $\mathcal{R}$:

Hilfssatz 1: $\bar{\mathcal{H}}$ enthält einen zu K isomorphen Teilkörper $\bar{K}$, welcher $e\mathbb{Z}$ enthält. ($\bar{K}$ ist nicht eindeutig bestimmt.)

Jeder zweiseitige $\bar{\mathcal{H}}$ -Modul $\mathcal{M}$ in $\mathcal{R}$ enthält eine Basis $m_1, m_2, \dots, m_t$ über $\bar{K}$, welche mit $\bar{K}$ elementweise vertauschbar ist; d.h. es ist für jedes $\alpha \in \bar{K}$: $\alpha m_i = m_i \alpha$; $i = 1, \dots, t$.

Beweis: Die Existenz von $\bar{K}$ folgt daraus, daß zunächst jedes

$\bar{\mathcal{A}}_q$ einen zu K isomorphen Teilkörper $\bar{K}_q$ enthält, welcher die Einheit e_q von $\bar{\mathcal{A}}_q$ und daher den Körper $e_q \cdot \mathbb{Z} \subseteq \bar{\mathcal{A}}_q$ enthält.

Da K von endlichem Grad über $\mathbb{Z}$ ist, sind die $\bar{K}_q$ bis auf innere Automorphismen von $\bar{\mathcal{A}}_q$ bestimmt. Ist dann θ_q ein Isomorphismus von $\bar{K}_1$ auf $\bar{K}_q$ ($q = 2, \dots, p$), so definieren wir $\bar{K}$ als die Menge aller $\alpha = \alpha_1 + \sum_{q=2}^p \theta_q(\alpha_1)$, $\alpha_1 \in \bar{K}_1$.

Der Modul $\mathcal{M}$ ist ein endlicher $\bar{K}$ -Modul, weil eZ in $\bar{K}$ enthalten ist und $\mathcal{M}$ endlich ist in Bezug auf Z . $\mathcal{M}$ ist $\bar{K}$ -links- $\bar{K}$ -rechts-Modul und Doppelmodul und vermittelt daher eine Klasse von Darstellungen von $\bar{K}$ in $(\bar{K})_t$. Da es aber nur eine Klasse von irreduziblen Darstellungen von $\bar{K}$ in $\bar{K}$ gibt, falls K von endlichem Grad über Z ist, vermittelt der Modul $\mathcal{M}$ auch die Darstellung $\alpha \rightarrow \alpha E_{tt}$ von $\bar{K}$. Die zu dieser Darstellung gehörige Basis von $\mathcal{M}$ hat die geforderten Eigenschaften. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Es seien e_{ik} Matrizeneinheiten von $\bar{A}_q$ und f_{ik} solche von $\bar{A}_r$, derart, daß

$$\bar{A}_q = \sum_{i,k=1}^{m_q} e_{ik} \bar{K} = \sum \bar{K} e_{ik} ; \quad \bar{A}_r = \sum_{i,k=1}^{m_r} f_{ik} \bar{K} = \sum \bar{K} f_{ik}$$

wird. Dann ist

$$l = \sum_{i=1}^{m_q} \bar{K} e_{i1} \quad \text{bzw.} \quad r = \sum_{k=1}^{m_r} \bar{K} f_{1k}$$

ein einfaches Links- bzw. Rechtsideal in $\bar{A}_q$ bzw. $\bar{A}_r$.

Hilfssatz 2: Ist $m \in \mathcal{R}$ elementweise mit $\bar{K}$ vertauschbar, so ist $\mathfrak{J} = l \cdot m \cdot r$ ein einfacher zweiseitiger $\bar{\mathfrak{J}}$ -Modul. $\mathfrak{J}$ besitzt eine Basis g_{ik} ($i = 1, \dots, m_q$; $k = 1, \dots, m_r$) über $\bar{K}$, die mit den Einheiten e_{ik} und f_{ik} durch die Rechenregeln

$$e_{ji} g_{ik} f_{ks} = g_{js} \quad (i, j = 1, \dots, m_q; k, s = 1, \dots, m_r)$$

verknüpft ist.

Beweis: Zunächst folgt aus der Vertauschbarkeit von $\bar{K}$ mit m , e und f , daß $\mathfrak{J}$ die Basis $g_{ik} = e_{i1} \cdot m \cdot f_{1k}$ besitzt. Die angegebenen Rechenregeln folgen dann unmittelbar. Aus den Rechenregeln (Überführbarkeit der Basiselemente in einander) folgt, daß $\mathfrak{J}$ zweiseitig einfach ist. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Die vollständige Reduzibilität von $\mathcal{R}$ folgt nun so: Wir wählen gemäß Hilfssatz 1 eine Basis $m_1, m_2, \dots, m_t$ von $\mathcal{R}$

über $\bar{K}$. Dann ist, weil $\bar{H}$ den Körper $\bar{K}$ enthält: $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^t \bar{H} m_i \bar{H}$. Weiter ist $\bar{H} = \sum_j l_j$ und $\bar{H} = \sum_k r_k$. Man kann also schreiben: $\mathcal{A} = \sum \sum \sum l_j m_i r_k$. Nach Hilfssatz 2 ist jeder der Summanden ein einfacher Modul. Gibt man der Summe eine bestimmte Reihenfolge und läßt jeden Summanden weg, der in der Summe der vorhergehenden enthalten ist, so bekommt man eine Darstellung von $\mathcal{A}$ als direkte Summe von einfachen zweiseitigen $\bar{H}$ -Moduln $\mathcal{F}_i$: $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^s \mathcal{F}_i$.

2. Die Komplexaufspaltung von $\mathcal{A}$:

Wir bezeichnen die Einheit von $\bar{A}_\varphi$ mit e_φ ($\varphi = 1, 2, \dots, p$) und setzen $\mathcal{A}_{\varphi\tau} = e_\varphi \mathcal{A} e_\tau$. Es gilt dann $\mathcal{A} = \sum_{\varphi, \tau=1}^p \mathcal{A}_{\varphi\tau}$. Offensichtlich gehört die Komplexaufspaltung $\{\mathcal{A}_{\varphi\tau}\}$ zu einer Sigmierung von $\mathcal{A}$.

Satz 1: Jeder einfache zweiseitige $\bar{H}$ -Modul $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}$ ist in einem der $\mathcal{A}_{\varphi\tau}$ enthalten. Alle einfachen zweiseitigen $\bar{H}$ -Moduln, die in ein und demselben $\mathcal{A}_{\varphi\tau}$ enthalten sind, sind einander $\bar{H}$ -operator-isomorph. Sie werden von links von allen $\bar{A}_\lambda$ außer $\bar{A}_\varphi$ und von rechts von allen $\bar{A}_\lambda$ außer $\bar{A}_\tau$ annulliert.
Beweis: Jeder einfache Modul $\mathcal{F}$ ist ganz in einem der $\mathcal{A}_{\varphi\tau}$ enthalten; denn $\mathcal{F} \cap \mathcal{A}_{\varphi\tau}$ ist wieder ein $\bar{H}$ -Modul, also entweder gleich (0) oder gleich $\mathcal{F}$.

Es sei also $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{\varphi\tau}$ enthalten. Wir wählen dann in $\mathcal{F}$ ein Element m , welches mit $\bar{K}$ vertauschbar ist (Hilfssatz 1).

$$\text{Es ist dann } \mathcal{F} = \bar{A}_\varphi m \bar{A}_\tau = \sum_{i=1}^{m_\varphi} \sum_{j=1}^{m_\tau} l_{\varphi i} m r_{\tau j}.$$

Da jeder der Moduln $l_{\varphi i} m r_{\tau j}$ Null oder einfach ist, muß einer von ihnen mit $\mathcal{F}$ identisch sein: $\mathcal{F} = l_{\varphi i} m r_{\tau j}$.

$\mathcal{F}$ besitzt also die in Hilfssatz 2 konstruierte Basis g_{ik} über $\bar{K}$. Ein zweiter Modul $\mathcal{F}^1$ in $\mathcal{A}_{\varphi\tau}$ würde eine Basis g_{ik}^1 ergeben, welche mit den Matrizeneinheiten von $\bar{A}_\varphi$ und $\bar{A}_\tau$ durch dieselben Rechenregeln verknüpft ist.

3. Partialdarstellungen zweiseitiger $\bar{H}$ -Moduln:

Es seien $\mathcal{D}_q$ ($q = 1, 2, \dots, p$) irreduzible Darstellungen von $\bar{A}_q$ in K . Ist dann der einfache $\bar{H}$ -Modul $\bar{F}$ in $\mathcal{R}_{q\tau}$ enthalten, so verstehen wir unter einer Partialdarstellung von $\bar{F}$ einen Isomorphismus $\mathcal{P}$ des Moduls $\bar{F}$ in den Bereich der rechteckigen Matrizen vom Typus $(m_q m_\tau)$ mit Koeffizienten aus K mit der Eigenschaft, daß für jedes $a \in \bar{A}_q$, $b \in \bar{A}_\tau$ und $r \in \bar{F}$ gilt:

$$\mathcal{P}(a \cdot r \cdot b) = \mathcal{D}_q(a) \cdot \mathcal{P}(r) \mathcal{D}_\tau(b).$$

Die Partialdarstellung $\mathcal{P}$ hängt also wesentlich von den Darstellungen $\mathcal{D}_q$ und $\mathcal{D}_\tau$ ab; wir sprechen daher von einer Partialdarstellung in Bezug auf $\mathcal{D}_q$ und $\mathcal{D}_\tau$.

Satz 2: a) Für jeden einfachen $\bar{H}$ -Modul $\bar{F} \subseteq \mathcal{R}_{q\tau}$ existiert eine Partialdarstellung $\mathcal{P}$ zu vorgegebenen Darstellungen $\mathcal{D}_q$ und $\mathcal{D}_\tau$.

b) Diese Partialdarstellung (in Bezug auf $\mathcal{D}_q$ und $\mathcal{D}_\tau$) ist bis auf Vielfache aus Z eindeutig bestimmt. Ist also $\mathcal{P}'$ eine zweite Darstellung in Bezug auf $\mathcal{D}_q$ und $\mathcal{D}_\tau$, so gibt es ein festes $\alpha \in Z$, so daß für jedes $r \in \bar{F}$ gilt: $\mathcal{P}'(r) = \alpha \cdot \mathcal{P}(r)$.

c) Sind die Darstellungen $\mathcal{D}'_q$ und $\mathcal{D}'_\tau$ von $\bar{A}'_q$ und $\bar{A}'_\tau$ zu Grunde gelegt, so gibt es Transformationen mit P und mit Q , so daß $\mathcal{D}'_q = P^{-1} \mathcal{D}_q P$ und $\mathcal{D}'_\tau = Q^{-1} \mathcal{D}_\tau Q$ wird. Aus einer Partialdarstellung $\mathcal{P}$ in Bezug auf $\mathcal{D}_q$ und $\mathcal{D}_\tau$ erhält man eine Darstellung $\mathcal{P}'$ in Bezug auf $\mathcal{D}'_q$ und $\mathcal{D}'_\tau$, wenn man

$$\mathcal{P}' = P^{-1} \mathcal{P} Q \quad \text{setzt.}$$

Beweis: Es seien e_{ik} und f_{ik} Matrizeneinheiten von $\bar{A}_q$ und $\bar{A}_\tau$, so daß jedes $a \in \bar{A}_q$ bzw. $b \in \bar{A}_\tau$ durch

$$a = \sum \bar{\alpha}_{ik} e_{ik}, \quad b = \sum \bar{\beta}_{ik} f_{ik}$$

($\bar{\alpha}_{ik}, \bar{\beta}_{ik} \in \bar{K}$) dargestellt wird. $\bar{K}$ ist zu K isomorph.

α_{ik} bzw. β_{ik} seien die den $\bar{\alpha}_{ik}$ bzw. $\bar{\beta}_{ik}$ in K entsprechenden Elemente. Dann erhält man Darstellungen $\mathcal{D}_\varphi$ und $\mathcal{D}_\tau$, wenn man $\mathcal{D}_\varphi(a) = (\alpha_{ik})$ bzw. $\mathcal{D}_\tau(b) = (\beta_{ik})$ setzt.

Wir zerlegen $\bar{A}_\varphi$ in eine direkte Summe von einfachen Links-idealen und $\bar{A}_\tau$ in eine ebensolche von einfachen Rechtsidealen:

$$\bar{A}_\varphi = \sum_{s=1}^{m_\varphi} \bar{\ell}_s \quad \text{wobei} \quad \bar{\ell}_s = \sum_{i=1}^{m_\varphi} \bar{k}_{is} e_{is}$$

$$\text{und} \quad \bar{A}_\tau = \sum_{t=1}^{m_\tau} \bar{r}_t \quad r_t = \sum_{k=1}^{m_\tau} \bar{k}_{tk} f_{tk}.$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es in $\tilde{J}$ ein m , welches mit $\bar{k}$ vertauschbar ist; nach Hilfssatz 2 ist dann $\tilde{J}$ identisch mit einem der Moduln $\bar{\ell}_s \cdot m \cdot r_t$ ($s = 1, 2, \dots, m_\varphi$; $t = 1, 2, \dots, m_\tau$), weil jeder derselben einfach oder (0) ist, und ihre Summe $\tilde{J}$ ergibt. Es sei

$$\tilde{J} = \bar{\ell}_{s_0} \cdot m \cdot r_{t_0} = \sum_{i=1}^{m_\varphi} \sum_{k=1}^{m_\tau} \bar{k}_{ik} g_{ik} = \sum \sum g_{ik} \bar{k},$$

wobei $g_{ik} = e_{is_0} m f_{t_0 k}$ gesetzt wurde. Jedes $r \in \tilde{J}$ läßt sich also in der Form $r = \sum_{i,k} \bar{\alpha}_{ik} g_{ik}$ schreiben. Durch

$\mathcal{P}(r) = (\alpha_{ik})$ wird eine Partialdarstellung von $\tilde{J}$ in Bezug auf die oben definierten Darstellungen $\mathcal{D}_\varphi$ und $\mathcal{D}_\tau$ erhalten.

Daß wir auch Partialdarstellungen zu vorgegebenen $\mathcal{D}_\varphi$ und $\mathcal{D}_\tau$ erhalten können, folgt aus dem bisher Bewiesenen, wenn man die Aussage (c) des Satzes anwendet. Wir beweisen daher zunächst diese.

c) Es sei für jedes $a \in \bar{A}_\varphi$, $b \in \bar{A}_\tau$, $r \in \tilde{J}$:

$$\mathcal{P}(a \cdot r \cdot b) = \mathcal{D}_\varphi(a) \cdot \mathcal{P}(r) \cdot \mathcal{D}_\tau(b). \text{ Dann ist}$$

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot \mathcal{P}(a \cdot r \cdot b) \cdot Q &= P^{-1} \mathcal{D}_\varphi(a) \cdot P \cdot P^{-1} \cdot \mathcal{P}(r) \cdot Q \cdot Q^{-1} \mathcal{D}_\tau(b) \cdot Q = \\ &= \mathcal{D}'_\varphi(a) P^{-1} \mathcal{P}(r) \cdot Q \cdot \mathcal{D}'_\tau(b). \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $\mathcal{P}' = P^{-1} \mathcal{P} \cdot Q$ gesetzt werden kann. Damit ist (a) und (c) bewiesen.

Hilfssatz 3: Es sei $m_\varphi \geq m_\tau$. Definiert man die Abbildung $\omega_{\varphi\tau}$ von $\bar{A}_\tau$ in $\bar{A}_\varphi$ durch $\mathcal{D}_\varphi(\omega_{\varphi\tau}(a)) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\tau(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für $a \in \bar{A}_\tau$,

so ist ω_{τ} ein starker Isomorphismus von $\bar{A}_{\tau}$ in $\bar{A}_{\tau}$. Wir behaupten: $\tilde{\mathcal{F}}$ enthält ein $p \neq 0$, welches die Vertauschungsrel. (V_{τ}) $\omega_{\tau}(a) \cdot p = p \cdot a$ für jedes $a \in \bar{A}_{\tau}$ erfüllt. Jedes $p' \in \tilde{\mathcal{F}}$, welches ebenfalls (V_{τ}) erfüllt, ist ein Vielfaches von p : $p' = \alpha p, \alpha \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Durch die Darstellung $\mathcal{P}$ ist jeder Matrix vom Typus $(m_{\tau} m_{\tau})$ mit Koeffizienten aus K ein Element in $\tilde{\mathcal{F}}$ zugeordnet.

Wir bestimmen p so, daß $\mathcal{P}(p) = \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau}$ wird. Dann ist

$$\mathcal{P}(\omega_{\tau}(a) \cdot p) = \mathcal{P}(\omega_{\tau}(a)) \cdot \mathcal{P}(p) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\tau}(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau} \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\tau}(a) \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau}$$

$$\text{und } \mathcal{P}(p \cdot a) = \mathcal{P}(p) \cdot \mathcal{D}_{\tau}(a) = \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau} \mathcal{D}_{\tau}(a) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\tau}(a) \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau}$$

Für das so bestimmte p gilt die Relation (V_{τ}) . Ist umgekehrt für $p' \in \tilde{\mathcal{F}}$ die Vertauschungsrelation erfüllt, und setzen wir $\mathcal{P}(p') = \begin{pmatrix} S_{\tau\tau} \\ T \end{pmatrix}_{\tau\tau}$, so folgt, falls man $\mathcal{D}_{\tau}(a) = A_{\tau\tau}$ setzt:

$$\mathcal{P}(p' \cdot a) = \mathcal{P}(p') \cdot \mathcal{D}_{\tau}(a) = \begin{pmatrix} S_{\tau\tau} \\ T \end{pmatrix}_{\tau\tau} A_{\tau\tau} = \begin{pmatrix} S \cdot A \\ T \cdot A \end{pmatrix}_{\tau\tau}$$

$$\mathcal{P}(\omega_{\tau}(a) \cdot p') = \mathcal{P}(\omega_{\tau}(a)) \cdot \mathcal{P}(p') = \begin{pmatrix} A_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}_{\tau\tau} = \begin{pmatrix} A \cdot S \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau}$$

Also gilt für jedes A mit Koeffizienten aus K :

$$\begin{pmatrix} S \cdot A \\ T \cdot A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot S \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ woraus folgt: } T = 0 \text{ und } S = \alpha E_{\tau\tau} (\alpha \in \mathbb{Z}).$$

Daher ist $p' = \alpha p$.

b) $\mathcal{P}'$ sei eine zweite Partialdarstellung von $\tilde{\mathcal{F}}$, ebenfalls in Bezug auf $\mathcal{D}_{\tau}$ und $\mathcal{D}_{\tau}$. Dann ist $\mathcal{P}'(p) = \alpha \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau} (\alpha \in \mathbb{Z})$.

Man erkennt dies, wenn man zunächst $\mathcal{P}'(p) = \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}_{\tau\tau}$ setzt und wie eben die Vertauschungsrelation anwendet. Da $\tilde{\mathcal{F}}$ ein einfacher $\tilde{\mathcal{F}}$ -Modul ist und

$$\mathcal{P}'(a \cdot p \cdot b) = \mathcal{D}_{\tau}(a) \cdot \mathcal{P}'(p) \cdot \mathcal{D}_{\tau}(b) = \alpha \mathcal{D}_{\tau}(a) \cdot \mathcal{P}(p) \cdot \mathcal{D}_{\tau}(b)$$

ist, folgt $\mathcal{P}'(r) = \alpha \mathcal{P}(r)$ für jedes $r \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Anmerkung: Ein durch (V_{τ}) gekennzeichnetes $p \in \tilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{A}_{\tau}$ hat die Eigenschaft, daß sich jedes $r \in \tilde{\mathcal{F}}$ in der Form

$r = a \cdot p$ ($a \in \bar{A}_\varphi$) oder $r = p \cdot b$ ($b \in \bar{A}_\tau$) schreiben läßt, je nach dem ob $m_\varphi \geq m_\tau$ oder $m_\varphi < m_\tau$ ist.

4. Die Produktrelation (P):

Wir gehen aus von einer festen Zerlegung von $\mathcal{R}$ in eine direkte Summe von einfachen zweiseitigen $\bar{F}_1$ -Moduln:

$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s \tilde{F}_i$. p_i ($i = 1, 2, \dots, s$) seien Partialdarstellungen von $\tilde{F}_i$ bezüglich der Darstellungen φ_φ ($\varphi = 1, 2, \dots, p$) von $\bar{A}_\varphi$. Wir wollen untersuchen, in welchem Zusammenhang die p_i untereinander stehen. p_i^{-1} sei die zu p_i inverse Zuordnung, welche also jeder Matrix mit Koeffizienten aus K von passendem Typus ein $r \in \tilde{F}_i$ zuordnet. Ist $\tilde{F}_i \subseteq \mathcal{R}_{\varphi\tau}$, so setzen wir $S(i) = (\varphi\tau)$. So wird jedem $i = 1, 2, \dots, s$ ein Doppelindex aus den Nummern $1, 2, \dots, p$ zugeordnet.

Satz 3: Es sei $x \in \tilde{F}_i$, $y \in \tilde{F}_j$; $S(i) = (\varphi\tau)$, $S(j) = (\sigma\lambda)$.

Dann kann $x \cdot y$ nur dann von Null verschieden sein, wenn $\tau = \sigma$ ist. In diesem Fall gilt die Produktrelation:

$$(P) \quad x \cdot y = \sum_{k=1}^s \alpha_{ij}^k p_k^{-1}(p_i(x) \cdot p_j(y))$$

$$S(k) = S(i) \wedge S(j)$$

($p_i(x) \cdot p_j(y)$ bedeutet hier das Produkt dieser Matrizen im üblichen Sinn. Es ist ausführbar, weil $p_i(x)$ vom Typus $(m_\varphi m_\tau)$ und $p_j(y)$ vom Typus $(m_\tau m_\lambda)$ ist. Das Produkt ist also vom Typus $(m_\varphi m_\lambda)$. Für Matrizen von diesem Typus ist aber gerade p_k^{-1} definiert wegen der Summationsbedingung, daß k nur die Nummern durchlaufen soll, für welche $S(k) = S(i) \wedge S(j)$ ist.)

Die Koeffizienten α_{ij}^k sind aus Z und hängen nur von i, j und k ab, nicht aber von x und y . Die Relation (P) sagt also, daß man die Produktbildung in $\mathcal{R}$ beherrscht, wenn man nur die Aufspaltung $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s \tilde{F}_i$, die Partialdarstellungen p_i und das zugehörige Zahlenschema $\alpha_{ij}^k \in Z$ kennt.

Das Zahlenschema α_{ij}^k bestimmt also wesentlich die Struktur von $\mathcal{R}$, wie auch später noch deutlich wird.

Beweis: Wir wählen in $\mathcal{F}_i$ bzw. $\mathcal{F}_j$ nach Hilfssatz 3 zwei Elemente p_i bzw. p_j aus, für welche die Vertauschungsrelationen $(V_{\tau\tau})$ und $(V_{\tau\lambda})$ gelten. Es sei

$$P_i(p_i) = E_{\tau\tau} \quad (= \text{Einheitsmatrix vom Typus } (m_\tau m_\tau)) \text{ und}$$

$$P_j(p_j) = E_{\tau\lambda}.$$

Hier wird eine Fallunterscheidung nötig. Wenn nämlich

a) m_τ nicht kleiner ist als m_τ und m_λ , gilt

$$P_i(p_i) \cdot P_j(p_j) = E_{\tau\tau} \cdot E_{\tau\lambda} = E_{\tau\lambda}.$$

b) Wenn aber m_τ kleiner ist als m_τ und m_λ , gilt

$$P_i(p_i) \cdot P_j(p_j) = E_{\tau\tau} E_{\tau\lambda} = \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau\lambda}.$$

Wir behandeln zuerst den Fall (a). Hier gilt für das Produkt $p_i p_j$ die Vertauschungsrelation $(V_{\tau\lambda})$. Nimmt man z.B. $m_\tau \geq m_\lambda$ an (im andern Fall gilt Entsprechendes), so ist für jedes $a \in \bar{\mathcal{A}}_\lambda$:

$$p_i p_j \cdot a = p_i \omega_{\tau\lambda}(a) \cdot p_j = \omega_{\tau\tau} \omega_{\tau\lambda}(a) \cdot p_i p_j = \omega_{\tau\lambda}(a) \cdot p_i p_j.$$

Diese Vertauschungsrelation gilt auch für die Komponente $(p_i p_j)_k$ des Produktes $p_i p_j$ in $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{R}_{\tau\lambda}$ bei der direkten Summendarstellung $\mathcal{R} = \sum \mathcal{F}_i$. ($p_i p_j$ und ebenso xy haben von Null verschiedene Komponenten nur in den $\mathcal{F}_k$, welche in $\mathcal{R}_{\tau\lambda}$ enthalten sind.) Nach Hilfssatz 3 gilt daher:

$$(p_i p_j)_k = \alpha_{ij}^k p_k \quad \text{oder}$$

$$P_k((p_i p_j)_k) = \alpha_{ij}^k E_{\tau\lambda} \quad (\alpha_{ij}^k \in \mathbb{Z}).$$

Es ist also

$$P_k((p_i p_j)_k) = \alpha_{ij}^k P_i(p_i) \cdot P_j(p_j).$$

Nach der Anmerkung am Ende von 5.3. lassen sich x und y folgendermaßen darstellen:

$$x = a \cdot p_i, \quad a \in \bar{\mathcal{A}}_\tau; \quad y = b \cdot p_j, \quad b \in \bar{\mathcal{A}}_\tau.$$

(Dabei ist allerdings $m_\tau \geq m_\tau$ und $m_\tau \geq m_\lambda$ angenommen. In den übrigen Fällen ist aber der weitere Beweis fast derselbe.) Ist $(xy)_k$ die Komponente von xy in $\mathcal{F}_k$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k((xy)_k) &= \mathcal{P}_k((a \cdot p_i \cdot b \cdot p_j)_k) = \mathcal{P}_k((a \cdot \omega_{\tau\tau}(b) \cdot p_i p_j)_k) = \\ &= \mathcal{J}_\tau(a \cdot \omega_{\tau\tau}(b)) \cdot \mathcal{P}_k((p_i p_j)_k) = \mathcal{J}_\tau(a) \cdot \mathcal{J}_\tau(\omega_{\tau\tau}(b)) \cdot \alpha_{ij}^k \mathcal{P}_i(p_i) \mathcal{P}_j(p_j). \end{aligned}$$

Wegen $\omega_{\tau\tau}(b) \cdot p_i = p_i \cdot b$ gilt

$$\mathcal{J}_\tau(\omega_{\tau\tau}(b)) \cdot \mathcal{P}_i(p_i) = \mathcal{P}_i(p_i) \cdot \mathcal{J}_\tau(b),$$

so daß wir in der obigen Umformung verfahren können:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k((xy)_k) &= \alpha_{ij}^k \cdot \mathcal{J}_\tau(a) \cdot \mathcal{P}_i(p_i) \cdot \mathcal{J}_\tau(b) \cdot \mathcal{P}_j(p_j) = \\ &= \alpha_{ij}^k \cdot \mathcal{P}_i(a \cdot p_i) \cdot \mathcal{P}_j(b \cdot p_j) = \alpha_{ij}^k \cdot \mathcal{P}_i(x) \cdot \mathcal{P}_j(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Relation (P).

Im Fall (b) (wir nehmen z.B. an $m_\tau \geq m_\lambda \geq m_\tau$) erfüllt das Produkt $p_i p_j$ nicht die Vertauschungsrelation $(V_{\tau\lambda})$, sondern nur folgende schwächere Relation. Für jedes $a \in \omega_{\lambda\tau}(\bar{A}_\tau)$ gilt:

$$p_i p_j \cdot a = p_i \cdot \omega_{\tau\lambda}(a) \cdot p_j = \omega_{\tau\tau} \omega_{\tau\lambda}(a) \cdot p_i p_j = \omega_{\tau\lambda}(a) \cdot p_i p_j.$$

Dieselbe schwache Vertauschungsrelation gilt auch für die

$$\text{Komponente } (p_i p_j)_k. \text{ Ist dann } \mathcal{P}_k((p_i p_j)_k) = \begin{pmatrix} S_{\tau\tau} & C \\ B & D \end{pmatrix}_{\tau\lambda},$$

so gilt wegen der genannten Vertauschungsrelation:

$$\begin{pmatrix} S_{\tau\tau} & C \\ B & D \end{pmatrix}_{\tau\lambda} \begin{pmatrix} A_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\lambda\lambda} = \begin{pmatrix} A_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau} \begin{pmatrix} S_{\tau\tau} & C \\ B & D \end{pmatrix}_{\tau\lambda}$$

$$\text{oder } \begin{pmatrix} S \cdot A & 0 \\ B \cdot A & 0 \end{pmatrix}_{\tau\lambda} = \begin{pmatrix} A \cdot S & A \cdot C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau\lambda} \quad \text{für jedes } A. \text{ Daraus folgt}$$

$B = 0, C = 0$ und $S_{\tau\tau} = \alpha_{ij}^k E_{\tau\tau}$. Daher ist

$$\mathcal{P}_k((p_i p_j)_k) = \alpha_{ij}^k \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}_{\tau\lambda}.$$

Ist e_τ die Einheit von $\bar{A}_\tau$, so gilt

$$p_i p_j = p_i \cdot e_\tau \cdot e_\tau \cdot p_j = \omega_{\tau\tau}(e_\tau) \cdot p_i p_j \cdot \omega_{\lambda\tau}(e_\tau)$$

und dieselbe Relation gilt auch für die Komponente $(p_i p_j)_k$.

$$\text{Daher ist } \mathcal{P}_k((p_i p_j)_k) = \mathcal{J}_\tau(\omega_{\tau\tau}(e_\tau)) \mathcal{P}_k((p_i p_j)_k) \mathcal{J}_\lambda(\omega_{\lambda\tau}(e_\tau)).$$

In Matrizen übersetzt, sieht diese Gleichung so aus:

$$\alpha_{ij}^k \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}_{\tau\lambda} = \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau} \cdot \alpha_{ij}^k \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}_{\tau\lambda} \begin{pmatrix} E_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\lambda\lambda}.$$

Daraus folgt $D' = 0$. Daher gilt auch in diesem Fall

$$p_k((p_i p_j)_k) = \alpha_{ij}^k \cdot p_i(p_1) \cdot p_j(p_j).$$

Der weitere Beweis läuft nun wie im Fall (a).

5. Der Kern der Algebra:

Durch die Relation (P) sind zunächst nur die α_{ij}^k definiert, für deren Indextripel i, j, k die Beziehung $S(k) = S(i) \wedge S(j)$ gilt. Für alle übrigen Indextripel setzen wir $\alpha_{ij}^k = 0$.

Satz 4: Das Zahlensystem $\{\alpha_{ij}^k\}$ ist das Faktorensystem einer assoziativen Algebra $\mathfrak{f}$ über $\mathbb{Z}$.

Beweis: Wir wählen in jedem der Moduln $\mathfrak{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) das Element δ_i , für welches $p_i(\delta_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{S(i)}$ ist. Dann gilt nach (P):

$$\begin{aligned} \delta_i \cdot \delta_j &= \sum \alpha_{ij}^k p_k^{-1}(p_i(\delta_i) \cdot p_j(\delta_j)) = \\ &= \sum \alpha_{ij}^k p_k^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{S(k)} \right] = \sum \alpha_{ij}^k \cdot \delta_k. \end{aligned}$$

Der $\mathbb{Z}$ -Modul $V = \sum \mathbb{Z} \cdot \delta_i$ ist also gegenüber Multiplikation abgeschlossen und wegen $V \subseteq \mathcal{R}$ eine assoziative Algebra, deren Faktorensystem $\{\alpha_{ij}^k\}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Das Faktorensystem $\{\alpha_{ij}^k\}$ hängt gemäß seiner Konstruktion ab:

1. von der Wahl der Darstellungen $p_i(\mathfrak{F}_i)$
2. von der Zerlegung $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s \mathfrak{F}_i$
3. von der Aufspaltung $\mathcal{R} = \bar{\mathfrak{F}} + \mathcal{K}$. (Der zu $\mathcal{R}/\mathcal{K}$ isomorphe Teilring $\bar{\mathfrak{F}}$ von $\mathcal{R}$ ist nicht eindeutig bestimmt.)

Satz 5: a) Die Abhängigkeit der Algebra $\mathfrak{f}$ von der Wahl der Partialdarstellungen und von der Zerlegung $\mathcal{R} = \sum \mathfrak{F}_i$ ist nur scheinbar. Andere Partialdarstellungen p_i' und Zer-

legungen $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^t \oplus \mathcal{J}_i$ führen zu assoziierten Faktorensystemen $\{\alpha'_{ij}\}$ und daher zu isomorphen Algebren $\mathfrak{f}$.

b) Zwei verschiedene Aufspaltungen $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{J}} \oplus \mathcal{K}$ und $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{J}}' \oplus \mathcal{K}$ führen zu isomorphen Algebren $\mathfrak{f}$, falls sich eine Isomorphie von $\bar{\mathcal{J}}$ auf $\bar{\mathcal{J}}'$ fortsetzen läßt zu einem Automorphismus von $\mathcal{R}$.

Beweis: a) 1. Es seien $\mathcal{P}'_i$ neue Partialdarstellungen derselben Moduln $\mathcal{J}_i$. Ist dann (5.3.) $\mathcal{P}'_i = \mathcal{Q}_\tau^{-1} \mathcal{P}_i \mathcal{Q}_\tau$ ($i = 1, 2, \dots, s$; $S(i) = (\tau)$), so folgt

$$\mathcal{P}_i^{-1}(\mathcal{M}_{\tau}) = \mathcal{P}_i'^{-1}(\mathcal{Q}_\tau^{-1} \mathcal{M}_{\tau} \mathcal{Q}_\tau).$$

Anwendung dieser Beziehung auf (P) ergibt:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \sum \alpha_{ij}^k \mathcal{P}_k^{-1}(\mathcal{Q}_\tau^{-1} \mathcal{P}_i(x) \mathcal{Q}_\tau \mathcal{Q}_\tau^{-1} \mathcal{P}_j(y) \mathcal{Q}_\tau) = \\ &= \sum \alpha_{ij}^k \mathcal{P}_k^{-1}(\mathcal{P}_i(x) \mathcal{P}_j(y)). \end{aligned}$$

Der Übergang von den Darstellungen $\mathcal{P}_i$ zu den Darstellungen $\mathcal{P}'_i$ ändert also an dem Faktorensystem $\{\alpha_{ij}^k\}$ überhaupt nichts.

Ist aber (5.3.) $\mathcal{P}'_i = \alpha_i \mathcal{P}_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{Z}$), so ist

$$\mathcal{P}_i^{-1} = \alpha_i \mathcal{P}_i'^{-1} = \mathcal{P}_i'^{-1} \alpha_i$$

und die Produktrelation geht über in

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \sum \alpha_{ij}^k \alpha_k \mathcal{P}_k'^{-1}(\alpha_i^{-1} \alpha_j^{-1} \mathcal{P}_i(x) \mathcal{P}_j(y)) = \\ &= \sum \alpha_{ij}^k \alpha_k \alpha_i^{-1} \alpha_j^{-1} \mathcal{P}_k'^{-1}(\mathcal{P}_i(x) \mathcal{P}_j(y)). \end{aligned}$$

Es ist also

$$\alpha_{ij}^k = \alpha_{ij}^k \alpha_k \alpha_i^{-1} \alpha_j^{-1};$$

d.h. die beiden Faktorensysteme sind assoziiert und führen zu isomorphen Algebren.

2. Es sei $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^t \mathcal{J}_i$ eine neue Zerlegung von $\mathcal{R}$ in einfache $\bar{\mathcal{J}}$ -Moduln; $\mathcal{P}'_i$ seien Partialdarstellungen der $\mathcal{J}'_i$, die in Bezug auf dieselben Darstellungen $\mathcal{J}_\tau$ wie die $\mathcal{P}_i$ gewählt seien. Zunächst folgt aus der Vollreduzibilität von $\mathcal{R}$, daß $s = t$ ist. Durch geeignete Umnummerierung der $\mathcal{J}'_i$ können wir erreichen, daß $\mathcal{J}'_i$ und $\mathcal{J}_i$ immer in demselben $\mathcal{R}_{\tau}$ liegen. Dann

ist $S(i) = S'(i)$. Wir wählen in jedem $\mathcal{T}_i$ ein δ_i , so daß

$$\mathcal{P}_i(\delta_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{S(i)} \quad \text{wird und ebenso } \delta'_i \in \mathcal{T}'_i, \text{ so}$$

daß $\mathcal{P}'_i(\delta'_i) = \mathcal{P}_i(\delta_i)$ gilt. $\bar{e}_\varphi \in \bar{\mathcal{A}}_\varphi$ wählen wir so aus, daß

$$\mathcal{V}_\varphi(\bar{e}_\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{\varphi\varphi} \quad \text{wird. Aus } S(i) = (\varphi\tau) \text{ folgt dann:}$$

$$\bar{e}_\varphi \cdot \delta'_i \cdot \bar{e}_\tau = \delta'_i.$$

Man sieht dies ein, wenn man die Gleichung in der Darstellung

$\mathcal{P}'_1$ schreibt. $(\delta'_i)_k$ sei die Komponente von δ'_i in $\mathcal{T}_k$. Dann gilt für diese Komponente: $\bar{e}_\varphi \cdot (\delta'_i)_k \cdot \bar{e}_\tau = (\delta'_i)_k$.

Übersetzt man diese Gleichung in die Darstellung $\mathcal{P}_k$, so folgt

$(\delta'_i)_k = \beta_i^k \cdot \delta_k$ mit $\beta_i^k \in \bar{K}$. Da die Komponente $(\delta'_i)_k$ dieselben Vertauschbarkeitseigenschaften in Bezug auf $\bar{\mathcal{A}}_\varphi$ und $\bar{\mathcal{A}}_\tau$ hat, wie δ'_i , kann man sogar $\beta_i^k \in \mathbb{Z}$ schließen. Es ist also

$$\delta'_i = \sum \beta_i^k \delta_k \quad \text{mit } \beta_i^k \in \mathbb{Z} \text{ und ebenso}$$

$$\delta_i = \sum \bar{\beta}_i^k \delta'_k.$$

Die Relator (P) sagt für die δ'_i :

$$\delta'_i \cdot \delta'_j = \sum \alpha_{ij}^k \mathcal{P}_k^{-1}(\mathcal{P}'_i(\delta'_i) \mathcal{P}'_j(\delta'_j)) = \sum \alpha_{ij}^k \delta'_k$$

und für die δ_i :

$$\delta_i \cdot \delta_j = \sum \alpha_{ij}^k \delta_k.$$

Beide Faktorensysteme gehören also zu Algebren, deren Basen durch lineare Transformation über $\mathbb{Z}$ aus einander hervorgehen, sind also assoziiert.*

b) Es sei Θ ein $\mathbb{Z}$ festlassender Automorphismus von $\mathcal{R}$, welcher $\bar{\mathcal{H}}$ auf $\bar{\mathcal{H}}'$ abbildet. Ist $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s \oplus \mathcal{T}_i$ und setzt man $\Theta(\mathcal{T}_i) = \mathcal{T}'_i$, so ist $\mathcal{T}'_i$ ein einfacher zweiseitiger $\bar{\mathcal{H}}'$ -Modul und die Aufspaltung $\mathcal{R} = \sum \oplus \mathcal{T}_i$ kann zur Bestimmung des Faktorensystemes $\{\alpha_{ij}^k\}$ dienen. Das Faktorensystem $\{\alpha_{ij}^k\}$ wird durch die Relation (P) definiert. Anwendung von Θ ergibt:

$$(\mathcal{P}^\Theta) \quad \Theta(x) \Theta(y) = u \cdot v = \sum \alpha_{ij}^k \Theta(\mathcal{P}_k^{-1}(\mathcal{P}_i(x) \mathcal{P}_j(y))).$$

Ist $P_1 (S(i) = (\varphi\tau))$ eine Partialdarstellung von $\mathcal{F}_1$ bezüglich der Darstellungen $\mathcal{D}_\varphi$ und $\mathcal{D}_\tau$ von $\bar{\alpha}_\varphi$ und $\bar{\alpha}_\tau$, so ist $P'_1 = P_1 \Theta^{-1}$ eine Partialdarstellung von $\mathcal{F}'_1$ bezüglich der Darstellungen $\mathcal{D}'_\varphi = \mathcal{D}_\varphi \Theta^{-1}$ und $\mathcal{D}'_\tau = \mathcal{D}_\tau \Theta^{-1}$ von $\bar{\alpha}'_\varphi$ und $\bar{\alpha}'_\tau$. Aus $P'_k = P_k \Theta^{-1}$ folgt $P'^{-1}_k = \Theta P^{-1}_k$. Weiter ist $P_1(x) = P_1(\Theta^{-1} \Theta(x)) = P'_1(\Theta(x)) = P'_1(u)$ und ebenso $P_j(y) = P'_j(v)$. Einsetzen in (P^Θ) ergibt:

$$u \cdot v = \sum \alpha_{ij}^k P_k^{-1}(P'_1(u) \cdot P'_j(v)).$$

Da andererseits diese Relation auch das gestrichene Faktorensystem definiert, sind beide Faktorensysteme gleich. Damit ist der Satz 5 bewiesen.

Fassen wir alle Aufspaltungen $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{K}$, welche durch einen $\mathbb{Z}$ festlassenden Automorphismus von $\mathcal{R}$ aus einander hervorgehen, zu einer Aufspaltungsklasse zusammen, so können wir sagen: Zu jeder Aufspaltungsklasse A von $\mathcal{R}$ gehört eine eindeutig bestimmte Algebra f_A , welche wir den zu der Aufspaltung gehörigen erweiterten Kern von $\mathcal{R}$ nennen wollen.

Über die Anzahl der Aufspaltungsklassen macht der Ergänzungssatz eine Aussage. Der Hauptsatz sagt:

Satz 6: Es gibt (auch im Falle mehrerer Aufspaltungsklassen A von $\mathcal{R}$) zu jedem erweiterten Kern f_A eine Signierung S_A , so daß $\mathcal{R}$ dem verschränkten Produkt von $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{R}/\mathcal{K}$ und f_A isomorph ist: $\mathcal{R} \cong (f_A, S_A, \bar{\mathcal{H}})$.

Beweis: Wir definieren $f_A | \mathbb{Z}$ durch

$$f_A = \sum_{i=1}^s \mathbb{Z} \cdot k_i \quad \text{und} \quad k_i \cdot k_j = \sum_{k=1}^s \alpha_{ij}^k \cdot k_k.$$

Dem Faktorensystem $\{\alpha_{ij}^k\}$ liegt

1. eine Aufspaltung $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{K}$,
2. eine Zerlegung $\mathcal{R} = \sum \mathcal{F}_i$,
3. ein System von Partialdarstellungen $P_i(\mathcal{F}_i)$ in Bezug auf die Darstellungen $\mathcal{D}_\varphi$ von $\bar{\alpha}_\varphi$ zu Grunde.

Die Signierung S_A in f_A definieren wir durch $S(k_1) = S(i)$. $\bar{h}$ ist zu h isomorph. Legt man einen festen Isomorphismus zu Grunde, so kann man $\mathcal{D}_\varphi$ auch als Darstellung von $\alpha_\varphi \subseteq h$ auffassen. Das System von Isomorphismen $\omega_{\varphi\tau}$ in h (welches wir zur Bildung des verschränkten Produktes benötigen) definieren wir durch

$$\mathcal{D}_\varphi(\omega_{\varphi\tau}(a)) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\tau(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ falls } m_\varphi \geq m_\tau \text{ ist.}$$

Wir wollen nun eine Isomorphie zwischen $\mathcal{R}$ und (f, S, h) herstellen. Dies geschieht, indem wir zuerst jedem $x \in \tilde{J}_1$ ein Bild in (f, S, h) zuordnen.

Es sei $x \in \tilde{J}_1$, $S(i) = (\varphi\tau)$ und

$m_\varphi \geq m_\tau$. $\mathcal{P}_i(x)$ ist vom Typus $(m_\varphi m_\tau)$. Wir definieren $a_x \in \alpha_\varphi$ durch

$$\mathcal{D}_\varphi(a_x) = (\mathcal{P}_i(x), 0)_{\varphi\varphi} \text{ und bilden } x \text{ ab auf } a_x^* k_1.$$

$m_\varphi < m_\tau$. Wir definieren $a_x \in \alpha_\tau$ durch $\mathcal{D}_\tau(a_x) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_i(x) \\ 0 \end{pmatrix}_{\tau\tau}$ und bilden x ab auf $k_1^* a_x$.

Wir müssen nun zeigen, daß diese Zuordnung eine Isomorphie gibt. Wir wählen zu diesem Zweck $x \in \tilde{J}_1$, $y \in \tilde{J}_j$; $S(i) = (\varphi\tau)$, $S(j) = (\phi\lambda)$. Falls $\tau \neq \phi$ ist, so ist auch $x \cdot y$ und auch das Produkt der Bilder von x und y Null. Es sei also $\tau = \phi$.

Wir wollen uns auf den Fall $m_\varphi \geq m_\tau \geq m_\lambda$ beschränken. Dann ist zu zeigen, daß bei unserer Festsetzung $x \cdot y$ abgebildet wird auf $(a_x^* k_1)(a_y^* k_j) = \sum \alpha_{ij}^k a_x \omega_{\varphi\tau}(a_y)^* k_k$.

Die Komponente von $x \cdot y$ in $\tilde{J}_k$ ist nur dann von Null verschieden, wenn $S(k) = S(i) \wedge S(j)$ ist. Dann ist nach der Produktrelation

$$(P) \quad \mathcal{P}_k((x \cdot y)_k) = \alpha_{ij}^k \cdot \mathcal{P}_i(x) \cdot \mathcal{P}_j(y).$$

Zu beweisen ist, daß unsere Zuordnung $(x \cdot y)_k$ abbildet auf $\alpha_{ij}^k a_x \omega_{\varphi\tau}(a_y)^* k_k$ oder daß

$$\mathcal{D}_\varphi(\alpha_{ij}^k a_x \omega_{\varphi\tau}(a_y)) = (\mathcal{P}_k((x \cdot y)_k), 0)_{\varphi\varphi} \text{ ist.}$$

$$\text{Es ist } \mathcal{D}_\varphi(\alpha_{ij}^k a_x \omega_{\varphi\tau}(a_y)) = \alpha_{ij}^k \mathcal{D}_\varphi(a_x) \cdot \mathcal{D}_\varphi(\omega_{\varphi\tau}(a_y)) =$$

$$= \alpha_{ij}^k (p_1(x), 0)_{\varphi\varphi} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\varphi\varphi} = \alpha_{ij}^k (p_1(x), 0)_{\varphi\varphi} \begin{pmatrix} p_j(y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\varphi\varphi},$$
 woraus unter Anwendung von (P) die zu beweisende Gleichung folgt. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Der folgende Satz gibt Aufschluß über die Struktur des erweiterten Kernes.

Satz 7: f_A besitzt eine Einheit ε . Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ die zur Signierung S_A gehörigen Idempotente in f_A und ist $\mathcal{K}_A$ das Radikal von f_A , so gilt $f_A = \mathcal{K}_A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$.

Anmerkung: Da das verschränkte Produkt $(\mathcal{K}, S, \mathcal{H})$ isomorph ist zum Radikal von $\mathcal{R}$ (4.3., Folgerung zu Satz 3), nennen wir $\mathcal{K}$ den Kern des Radikals der Algebra $\mathcal{R}$.

Beweis: Wir können die Zerlegung $\mathcal{R} = \sum \mathcal{J}_i$ (welche wir zur Konstruktion von $\{\alpha_{ij}^k\}$ benötigen) so wählen, daß die einfachen Komponenten $\mathcal{A}_\varphi$ ($\varphi = 1, 2, \dots, p$) der Reihe nach mit $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_p$ übereinstimmen. Wendet man die Produktrelation nun auf $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_p$ an, so folgt für $i, j = 1, \dots, p$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ii}^1 &= 1, \\
 \alpha_{ii}^k &= 0 \text{ falls } i \neq k, \\
 \alpha_{ij}^k &= 0 \text{ falls } i \neq j \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

Also sind die $k_i = \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) sich gegenseitig annullierende Idempotente, die wegen $S(\varepsilon_i) = S(i) = (ii)$ zur Signierung S gehören. Wegen $\mathcal{R} = \sum_{i=p+1}^s \mathcal{J}_i$ ist

$(\alpha_{ij}^k, i, j, k = p+1, \dots, s)$ das Faktorensystem einer Algebra $\mathcal{K} = \sum_{i=p+1}^s \mathbb{Z} k_i$, für welche $(\mathcal{K}, S, \mathcal{H}) \cong \mathcal{R}$ ist. Also ist (4.3. Satz 3) $\mathcal{K}$ eine nilpotente Algebra. Es gilt

$f = \mathcal{K}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$. Da die ε idempotent sind, ist $\mathcal{K}$ das Radikal von f . Damit ist der Satz bewiesen.

6. Der Ergänzungssatz:

Es soll hier untersucht werden, wann zwei Aufspaltungen

$\mathcal{R} = \bar{\mathcal{J}} \oplus \mathcal{K}$ und $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{J}}' \oplus \mathcal{K}$ durch Anwendung eines Automor-

phismus von $\mathcal{A}$ auseinander hervorgehen, also zur selben Klasse gehören.

Satz 8: Der Koeffizientenkörper P der Algebra $\mathcal{A}$ sei nicht von der Charakteristik 2. Sind $\bar{\mathcal{H}}$ und $\bar{\mathcal{H}}'$ zwei zu $\mathcal{H} = \mathcal{A}/\mathcal{A}$ isomorphe Teilringe von $\mathcal{A}$ und sind $e_{ik}^{\mathcal{H}}$ bzw. $e_{ik}^{\mathcal{H}'}$ Matrizen-einheiten der einfachen Bestandteile $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}} \subseteq \bar{\mathcal{H}}$ bzw. $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}'} \subseteq \bar{\mathcal{H}}'$ ($\mathcal{H} = 1, 2, \dots, p$), so lassen sie sich immer durch einen inneren Automorphismus von $\mathcal{A}$ in einander überführen; d.h. es gibt einen inneren Automorphismus Θ von $\mathcal{A}$, so daß - eine geeignete Numerierung der $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}} \subseteq \bar{\mathcal{H}}$ vorausgesetzt - $\Theta(e_{ik}^{\mathcal{H}'}) = e_{ik}^{\mathcal{H}}$ wird.

Folgerung 1: Sind die einfachen Bestandteile von $\mathcal{H}$ isomorph zu vollen Matrixringen im Koeffizientenkörper, so gibt es nur eine Aufspaltungsklasse. Insbesondere gibt es nur eine Aufspaltungsklasse, wenn P algebraisch abgeschlossen ist.

Folgerung 2: Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf eine primäre Algebra $\mathcal{A}$, für die also $\mathcal{A}/\mathcal{A} = \mathcal{A}$ einfach ist und bezeichnen mit K den Wedderburnschen Schiefkörper von $\mathcal{A}$. Die beiden zu $\mathcal{A}$ isomorphen Teilalgebren $(P)_{\mathcal{A}} \otimes \bar{K}$ und $(P)_{\mathcal{A}}' \otimes \bar{K}'$ gehen durch einen Automorphismus von $\mathcal{A}$ aus einander hervor, wenn es einen P festlassenden Automorphismus von $\mathcal{A}$ gibt, der $\bar{K}$ in $\bar{K}'$ überführt. Kürzer: $(P)_{\mathcal{A}} \otimes \bar{K}$ und $(P)_{\mathcal{A}}' \otimes \bar{K}'$ sind konjugiert, wenn und nur wenn $\bar{K}'$ und $\bar{K}$ konjugiert sind. Es gibt also so viele verschiedene Aufspaltungsklassen von $\mathcal{A}$, als es verschiedene Klassen von konjugierten Teilkörpern $\bar{K}$ in $\mathcal{A}$ gibt, welche zu K isomorph sind.

Beweis: Jedes $a' \in \bar{\mathcal{H}}'$ läßt sich in eindeutiger Weise so darstellen: $a' = a + f(a)$, $a \in \bar{\mathcal{H}}$, $f(a) \in \mathcal{A}$.

Dann ist die Zuordnung $a' \rightarrow a$ ein Isomorphismus von $\bar{\mathcal{H}}'$ auf $\bar{\mathcal{H}}$.

Denn ist auch $b' \in \bar{\mathcal{B}}'$, so ist $a' \cdot b' = a \cdot b + a \cdot f(b) + f(a) \cdot b + f(a) \cdot f(b)$ und da $af(b) + f(a)b + f(a)f(b)$ in $\mathcal{A}$ liegt, können wir weiter schreiben: $a'b' = ab + f(ab)$. Analoges läßt sich auch für die Summe zeigen. Unter diesem Isomorphismus wird jedes $\bar{\mathcal{A}}'_\varphi \subseteq \bar{\mathcal{B}}'$ auf ein $\bar{\mathcal{A}}_\varphi \subseteq \bar{\mathcal{B}}$ abgebildet. Durch geeignete Umnummerierung können wir erreichen, daß $\varphi' = \varphi$ wird. Gehen wir von irgend welchen Matrizeneinheiten e_{ik}^{φ} in $\bar{\mathcal{A}}'_\varphi$ aus und schreiben $e_{ik}^{\varphi'} = e_{ik}^{\varphi} + f(e_{ik}^{\varphi})$, so sind die e_{ik}^{φ} bestimmte Matrizeneinheiten in $\bar{\mathcal{A}}_\varphi$. Wir zeigen zuerst, daß man diese beiden Sätze von Einheiten in einander überführen kann. Nach Hilfssatz 2 in 3.4. existiert ein innerer Automorphismus ω von $\mathcal{A}$, derart, daß

$$(E) \quad \begin{aligned} \omega(e_{ik}^{\varphi}) &= e_{ik}^{\varphi} + g(e_{ik}^{\varphi}), & g(e_{ik}^{\varphi}) &\in \mathcal{A} \\ g(e_{ii}^{\varphi}) &= 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, m_\varphi; \quad i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

ist. Es sind nämlich $e_{11}^{\varphi}, e_{22}^{\varphi}, \dots, e_{m_\varphi m_\varphi}^{\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \dots, p$) und $e_{11}^{\varphi}, e_{22}^{\varphi}, \dots, e_{m_\varphi m_\varphi}^{\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \dots, p$) zwei Sätze von Idempotenten mit den dort geforderten Eigenschaften. Also existiert in $\mathcal{A}$ ein $q = e + n$ ($n \in \mathcal{A}$), so daß auch $q^{-1} = e + n'$ existiert und die Transformation ω mit q die beiden Sätze von Idempotenten in einander überführt. Es ist dann

$$\begin{aligned} \omega(e_{ik}^{\varphi}) &= q \cdot e_{ik}^{\varphi} \cdot q^{-1} = (e+n)(e_{ik}^{\varphi} + f(e_{ik}^{\varphi}))(e+n') = \\ &= e_{ik}^{\varphi} + q \cdot f(e_{ik}^{\varphi}) \cdot q^{-1} + e_{ik}^{\varphi} \cdot n' + n \cdot e_{ik}^{\varphi} + n \cdot e_{ik}^{\varphi} \cdot n' = \\ &= e_{ik}^{\varphi} + g(e_{ik}^{\varphi}). \end{aligned}$$

Damit ist (E) bewiesen. Sind e_φ und e'_φ die Einheiten von $\bar{\mathcal{A}}_\varphi$ und $\bar{\mathcal{A}}'_\varphi$, so ist $\omega(e'_\varphi) = e_\varphi$ und daher gilt für jedes $a' \in \bar{\mathcal{A}}'_\varphi$:

$$\begin{aligned} \omega(a') &= \omega(e'_\varphi a' e'_\varphi) = \omega(e'_\varphi) \omega(a') \omega(e'_\varphi) = e_\varphi (a + g(a)) \cdot e_\varphi = \\ &= a + e_\varphi g(a) \cdot e_\varphi = a + g(a). \end{aligned}$$

Also ist $g(a) \in \mathcal{A}_{\varphi\varphi}$. Wir beschränken uns nun auf einen festen Index φ ; wir dürfen dann einfach e_{ik}^{φ} statt $e_{ik}^{\varphi'}$ schreiben.

Die $\omega(e'_{ik})$ sind wieder Matrizeneinheiten, die wir durch $\bar{e}_{ik}$ abkürzen. Es ist dann wegen (E): $\bar{e}_{11} = e_{11}$ ($i = 1, \dots, m$). Wir setzen
$$p = \sum_{i=1}^m e_{i1} \bar{e}_{1i}.$$

Dann wird

$$p \cdot \sum_k \bar{e}_{k1} e_{1k} = \sum_{i,k} e_{i1} \bar{e}_{1i} \bar{e}_{k1} e_{1k} = \sum_i e_{i1} \bar{e}_{1i} e_{1i} = e.$$

Also ist p ein reguläres Element von $\mathcal{R}$. $p^{-1} = \sum_k \bar{e}_{k1} e_{1k}$.

$$\begin{aligned} \text{Es wird } p \cdot e_{uv} \cdot p^{-1} &= \sum_{i,k} e_{i1} \bar{e}_{1i} \bar{e}_{uv} \bar{e}_{k1} e_{1k} = \\ &= \sum_k e_{u1} \bar{e}_{1u} \bar{e}_{uv} \bar{e}_{k1} e_{1k} = e_{u1} \bar{e}_{1u} \bar{e}_{uv} \bar{e}_{v1} e_{1v} = e_{u1} \bar{e}_{11} e_{1v} = \\ &= e_{u1} e_{11} e_{1v} = e_{uv}. \end{aligned}$$

Die Transformation mit p führt also die Einheiten $\bar{e}_{ik}$ über in die Einheiten e_{ik} . Durch zwei aufeinander folgende Transformationen, ω und die mit p , gelingt es also, die Einheiten e'_{ik} überzuführen in Einheiten von $\bar{\mathcal{A}}_\varphi$. Durch einen dritten, danach geschalteten inneren Automorphismus von $\bar{\mathcal{A}}_\varphi$ kann man sogar erreichen, daß die e'_{ik} in vorgegebene Matrizeneinheiten von $\bar{\mathcal{A}}_\varphi$ überführt werden. Sucht man für jeden Index φ die Transformation t_φ , welche dies leistet, so ist $t = \sum t_\varphi$ ein reguläres Element von $\mathcal{R}$. Denn es ist $t_\varphi \in \mathcal{R}$, so daß sich die t_φ gegenseitig annullieren und man $t^{-1} = \sum t_\varphi^{-1}$ setzen kann. Die Transformation mit t ist dann der gesuchte innere Automorphismus Θ , womit der Satz 8 bewiesen ist.

Anmerkung: Enthalten $\bar{\mathcal{A}}_\varphi$ und $\bar{\mathcal{A}}'_\varphi$ beide denselben Schiefkörper $\bar{K}_\varphi$ und sind die Einheiten e_{ik}^φ und e'_{ik}^φ mit demselben vertauschbar, so läßt der eben konstruierte Automorphismus Θ $\bar{K}_\varphi$ elementweise invariant. Denn sämtliche Elemente aus $\mathcal{R}$, mit denen transformiert wurde, sind dann mit $\bar{K}_\varphi$ vertauschbar.

Die erste Folgerung aus Satz 8 ist klar; die zweite ergibt sich so: Wenn $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ konjugiert sind, existiert ein Auto-

morphismus von $\mathcal{A}$, welcher $\bar{K}'$ überführt in $\bar{K}$. Dieser Automorphismus überführt dann $(P)'_{\mathfrak{m}} \otimes \bar{K}'$ in $(P)'_{\mathfrak{m}} \otimes \bar{K}$. Durch einen zweiten Automorphismus lassen sich die Matrizeneinheiten von $(P)'_{\mathfrak{m}}$ überführen in die von $(P)_{\mathfrak{m}}$. Dieser zweite Automorphismus kann, wie wir eben sahen, so gewählt werden, daß er $\bar{K}$ invariant läßt. Übt man also beide Automorphismen nacheinander aus, so wird $(P)'_{\mathfrak{m}} \otimes \bar{K}'$ in $(P)_{\mathfrak{m}} \otimes \bar{K}$ überführt.

Läßt sich umgekehrt $(P)'_{\mathfrak{m}} \otimes \bar{K}'$ durch einen Automorphismus in $(P)_{\mathfrak{m}} \otimes \bar{K}$ überführen, so kann man erreichen, daß derselbe $(P)'_{\mathfrak{m}}$ in $(P)_{\mathfrak{m}}$ überführt. $\bar{K}'$ geht dabei in $\bar{K}'' \subseteq (P)_{\mathfrak{m}} \otimes \bar{K}$ über und ist mit $(P)_{\mathfrak{m}}$ elementweise vertauschbar. Daraus folgt $\bar{K}'' = \bar{K}$. Also sind $\bar{K}'$ und $\bar{K}$ in diesem Falle konjugiert.

Damit ist die Folgerung 2 bewiesen.

Noch eine Bemerkung sei hier angefügt. Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, bei der ein Zerfällungskörper $\Omega | Z$ für die einfachen Bestandteile von $\mathcal{A}/K$ existiert, so besitzt $\mathcal{A}_{\Omega}$ nur eine Aufspaltungs-klasse. Sind dann $\mathcal{A}_{\Omega} = \bar{\mathcal{E}}_{\Omega} \oplus \mathcal{A}_{\Omega}$ und $\mathcal{A}_{\Omega} = \bar{\mathcal{F}}_{\Omega} \oplus \mathcal{A}_{\Omega}$ zwei Aufspaltungen, so existiert zwar immer ein innerer Automorphismus von $\mathcal{A}_{\Omega}$, der $\bar{\mathcal{F}}'_{\Omega}$ in $\bar{\mathcal{E}}_{\Omega}$ überführt. Dieser bildet aber $\bar{\mathcal{F}}'_{\Omega}$ i. a. nicht ab auf $\bar{\mathcal{E}}_{\Omega}$, so daß es in diesem Falle mehr Aufspaltungsklassen gibt.

7. Primäre Algebren:

Bei einer primären Algebra ist der Restklassenring $\mathcal{A}/K = \mathcal{A}$ einfach. Dann ist $\mathcal{A} \cong (\mathfrak{f}_{\mathcal{A}}, S_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$. In diesem Fall erzeugt die Signierung $S_{\mathcal{A}}$ in $\mathfrak{f}_{\mathcal{A}}$ - dem erweiterten Kern - nur einen Komplex, nämlich $\mathfrak{f}_{\mathcal{A}}$ selbst, dem das Nummernpaar (11) zugeordnet ist. Das verschränkte Produkt ist in diesem Fall ein direktes: $\mathcal{A} \cong \mathfrak{f}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ ist darstellbar als voller Matrixring vom Grad m in einem Schiefkörper $K|Z$: $\mathcal{A} = (K)_{\mathfrak{m}} = (Z)_{\mathfrak{m}} \otimes K$. Also ist $\mathcal{A} \cong (Z)_{\mathfrak{m}} \otimes K \otimes \mathfrak{f}_{\mathcal{A}}$. Das direkte

Produkt $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{f}_A = \mathcal{P}_A$ ist ein vollständig primärer Ring; denn es enthält eine Einheit und der Restklassenring nach seinem Radikal ist K . $\mathcal{R}$ ist also voller Matrixring in einem vollständig primären Ring: $\mathcal{R} \cong (Z)_m \otimes \mathcal{P}_A$. Wir wollen zeigen, daß - trotz mehrerer Aufspaltungsklassen A - die vollständig primäre Algebra $\mathcal{P}_A$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Es sei also

$$\mathcal{R} = (Z)_m \otimes \mathcal{P} = (Z)_m' \otimes \mathcal{P}'.$$

Nach Satz 8 gibt es einen Z festlassenden Automorphismus Θ , welcher $(Z)_m'$ in $(Z)_m$ überführt. $\Theta(\mathcal{P}') = \mathcal{P}''$ ist mit $(Z)_m$ elementweise vertauschbar. Denn $\mathcal{P}'$ hatte diese Eigenschaft in Bezug auf $(Z)_m'$. Aus der Vertauschbarkeit von $\mathcal{P}''$ mit $(Z)_m$ folgt $\mathcal{P}'' = \Theta(\mathcal{P}') = \mathcal{P}$. $\mathcal{P}'$ und $\mathcal{P}$ sind also isomorph. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 9: Eine primäre Algebra ist als direktes Produkt eines vollen Matrixringes in Z mit einer vollständig primären Algebra darstellbar: $\mathcal{R} = (Z)_m \otimes \mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ ist direktes Produkt von K - dem zu $\mathcal{R}/\mathfrak{N}$ gehörigen Schiefkörper - und einem erweiterten Kern $\mathfrak{f}_A$ von $\mathcal{R}$. Trotz mehrerer Aufspaltungsklassen ist $\mathcal{P} = \mathfrak{f}_A \otimes K$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

6. Automorphismen verschränkter Produkte

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich die Automorphismengruppe eines verschränkten Produktes $\mathcal{R} = (\mathfrak{f}, S, \mathfrak{H})$ aus den Automorphismengruppen der Faktoren zusammensetzt.

$\mathfrak{f}$ besitze eine Einheit; die zu S gehörigen Idempotente seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$. Dann enthält $\mathcal{R}$ den zu $\mathfrak{H}$ isomorphen Teilring $\bar{\mathfrak{H}}$, dessen einfache Komponenten durch

$$\bar{\mathcal{A}}_{\varepsilon} = \{a \varepsilon; a \in \mathcal{A}_{\varepsilon}\} \text{ gegeben sind.}$$

Unter $\mathfrak{Z}$, der Gruppe der zulässigen Permutationen, verstehen wir die Gruppe aller Permutationen P der Nummern $1, 2, \dots, p$, für welche $\mathcal{A}_{\varepsilon}$ und $\mathcal{A}_{P(\varepsilon)}$ ($\varepsilon = 1, 2, \dots, p$) vom gleichen Grad, also isomorph sind. Dann gibt es für jedes $P \in \mathfrak{Z}$ einen Automorphismus von $\bar{\mathfrak{H}}$, welcher $\bar{\mathcal{A}}_{\varepsilon}$ überführt in $\bar{\mathcal{A}}_{P(\varepsilon)}$.

Ein Automorphismus ϕ von $\mathfrak{f}$ heißt signierungstreu, wenn es ein $P \in \mathfrak{Z}$ gibt, so daß $S^{\phi} = PS$ ist. Wir nennen ϕ streng signierungstreu, wenn $S^{\phi} = S$ ist. Die Gruppe der signierungstreuen Automorphismen von $\mathfrak{f}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_{\mathfrak{Z}}$; $\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}$ ist die Gruppe der streng signierungstreuen Automorphismen von $\mathfrak{f}$.

Jedes $\phi_{\varepsilon} \in \mathcal{G}_{\mathfrak{f}}$ läßt sich fortsetzen zu einem Automorphismus ϕ von $\mathcal{R}$, wenn wir schreiben:

$$\phi(a * k) = a * \phi_{\varepsilon}(k) \quad \text{bzw.} \quad \phi(k * a) = \phi_{\varepsilon}(k) * a.$$

Die Gruppe der ϕ nennen wir $\mathcal{T}_{\mathfrak{f}}$.

Jeder innere Automorphismus von $\bar{\mathfrak{H}}$ hat die Form $\omega(h) = q h q^{-1}$ ($h, q \in \bar{\mathfrak{H}}$) und ist daher gleichzeitig ein innerer Automorphismus von $\mathcal{R}$: $\omega(r) = q r q^{-1}$ ($r \in \mathcal{R}$). Die Gruppe dieser Automorphismen nennen wir $\mathcal{U}$.

Satz 1: Die Gruppe jener Automorphismen von $\mathcal{R}$, welche in

$\bar{g}$ einen inneren Automorphismus induzieren, ist das direkte Produkt $\mathcal{U} \times \mathcal{T}_\tau$.

Den Beweis führen wir in zwei Schritten:

I. Der Automorphismus ϕ von $\mathcal{R}$ lasse $\bar{g}$ elementweise fest. Für $x \in \mathcal{R}$ sei $S(x) = (\varrho\tau)$, was hier besagen soll, das x von der Form $\sum a_i * k_i$ ist. Dann gilt:

$$S(i) = (\varrho\tau)$$

$$e_\varrho \varepsilon_\varrho \cdot x \cdot e_\tau \varepsilon_\tau = x.$$

Daraus folgt unter Anwendung von ϕ :

$$e_\varrho \varepsilon_\varrho \cdot x^\phi \cdot e_\tau \varepsilon_\tau = x^\phi,$$

woraus $S(x^\phi) = (\varrho\tau)$ folgt. Setzt man $\omega_{\varrho\tau}(e_\tau) = e_{\varrho\tau}$, so gilt für $e_{\varrho\tau} * k$ folgende Vertauschungsrelation:

$$(V_{\varrho\tau}) \quad (e_{\varrho\tau} * k)(a \varepsilon_\tau) = (\omega_{\varrho\tau}(a) \varepsilon_\varrho)(e_{\varrho\tau} * k) \text{ für jedes } a \in \mathcal{A}_\tau.$$

Nach Anwendung von ϕ folgt daraus:

$$(V_{\varrho\tau}^\phi) \quad (e_{\varrho\tau} * k)^\phi (a \varepsilon_\tau) = (\omega_{\varrho\tau}(a) \varepsilon_\varrho)(e_{\varrho\tau} * k)^\phi.$$

Nimmt man $(e_{\varrho\tau} * k)^\phi$ in der Form $\sum a_i * k_i$ an und über-

$$S(i) = (\varrho\tau)$$

trägt man die Vertauschungsrelation $(V_{\varrho\tau}^\phi)$ in die Darstellung

$\mathcal{J}_\varrho$, so folgt $(e_{\varrho\tau} * k)^\phi = e_{\varrho\tau} * \phi_\varrho(k)$. Die Abbildung

$k \mapsto \phi_\varrho(k)$ ist ein Automorphismus aus der Gruppe $\mathcal{G}_\tau$. Der Automorphismus ϕ von $\mathcal{R}$ nimmt daher folgende Form an:

$$\phi(a * k) = a * \phi_\varrho(k) \quad \text{bezw.} \quad \phi(k * a) = \phi_\varrho(k) * a.$$

II. Der Automorphismus δ von $\mathcal{R}$ bilde die $\bar{\mathcal{A}}_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$) auf sich ab. Dann gibt es immer einen inneren Automorphismus ω von $\bar{g}$ (und daher von $\mathcal{R}$), so daß $\omega^{-1} \delta = \phi \bar{g}$ elementweise festläßt. Wie sieht nun ω aus? Es bildet

$$a \varepsilon_\varrho \text{ ab auf } q_\varrho a \cdot q_\varrho^{-1} \varepsilon_\varrho \quad (a, q_\varrho \in \mathcal{A}_\varrho).$$

Ist daher $S(*k) = (\varrho\tau)$, so bildet es $a * k$ ab auf

$$(q_\varrho \varepsilon_\varrho)(a * k)(q_\tau^{-1} \varepsilon_\tau) = q_\varrho a \cdot \omega_{\varrho\tau}(q_\tau^{-1}) * k.$$

Für $S(k*) = (\tau\lambda)$ bildet es $k * a$ ab auf

$$(q_\tau \varepsilon_\tau)(k^* a)(q_\lambda^{-1} \varepsilon_\lambda) = k^* \omega_{\lambda\tau}(q_\tau) \cdot a \cdot q_\lambda^{-1}.$$

Da der Automorphismus σ die Koeffizienten der k sowie deren Signierung unverändert läßt, sind ω und σ miteinander vertauschbar. Außerdem sieht man, daß $\mathcal{U} \cap \mathcal{T}_\xi = \xi$ ist; also ist das Produkt von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{T}_\xi$ direkt.

Satz 2: Bezeichnet man die Gruppe aller Automorphismen von $\mathcal{R}$, welche $\bar{h}$ auf sich abbilden, mit $\mathcal{L}$, so ist

$$\mathcal{L}/\mathcal{U} \cong \mathcal{G}_3.$$

Beweis: $\sigma \in \mathcal{L}$ permutiert die isomorphen einfachen Bestandteile von $\bar{h}$. Es werde dabei $\bar{a}_\varphi$ auf $\bar{a}_{P(\varphi)}$ abgebildet.

σ bildet $a \varepsilon_\varphi$ ($a \in \mathcal{O}_\varphi$) ab auf $a^\sigma \varepsilon_{P(\varphi)}$ ($a^\sigma \in \mathcal{O}_{P(\varphi)}$).

Wendet man auf die Gleichung

$$e_\varphi \varepsilon_\varphi \cdot e_{\varphi\tau}^* k \cdot e_\tau \varepsilon_\tau = e_{\varphi\tau}^* k = x$$

den Automorphismus σ an, so folgt

$$e_{P(\varphi)} \varepsilon_{P(\varphi)} \cdot (e_{\varphi\tau}^* k)^\sigma \cdot e_{P(\tau)} \varepsilon_{P(\tau)} = (e_{\varphi\tau}^* k)^\sigma = x^\sigma.$$

Daraus ergibt sich, daß $S(x^\sigma) = PS(x)$ ist. Wir untersuchen nun mit Hilfe von Vertauschungsrelationen, welche Form x^σ annimmt.

$$(1) \quad x \cdot a \varepsilon_\tau = \omega_{\varphi\tau}(a) \varepsilon_\varphi \cdot x$$

$$(2) \quad x^\sigma \cdot a^\sigma \varepsilon_{P(\tau)} = \sigma \omega_{\varphi\tau}(a) \varepsilon_{P(\varphi)} \cdot x^\sigma$$

Nun ist $\sigma \omega_{\varphi\tau} \sigma^{-1} = \omega_{P(\varphi)P(\tau)}$ ein System von Isomorphismen mit den Eigenschaften 4.1., 1-3. Also gilt (4.1.):

$$\sigma \omega_{\varphi\tau} \sigma^{-1} = \omega_{P(\varphi)P(\tau)} = \Theta_{P(\varphi)}^{-1} \cdot \omega_{P(\varphi\tau)} \cdot \Theta_{P(\tau)}.$$

Nennen wir den inneren Automorphismus von $\bar{h}$, dessen Beschränkung auf $\mathcal{O}_\varphi$ identisch ist mit Θ_φ ($\varphi = 1, 2, \dots, p$) Θ , so gilt (3) $\Theta \sigma \omega_{\varphi\tau} = \omega_{P(\varphi\tau)} \Theta$

Man kann Θ auch als inneren Automorphismus von $\bar{h}$ und sogar von $\mathcal{R}$ auffassen. Wir wenden Θ auf (2) an und verwenden (3).

Wir erhalten $x^{\sigma\Theta} \cdot a^{\sigma\Theta} \varepsilon_{P(\tau)} = \Theta \sigma \omega_{\varphi\tau}(a) \varepsilon_{P(\varphi)} \cdot x^{\sigma\Theta} =$
 $= \omega_{P(\varphi\tau)}(a^{\sigma\Theta}) \varepsilon_{P(\tau)} \cdot x^{\sigma\Theta}$. Also gilt für jedes $a \in \mathcal{O}_{P(\tau)}$:

$$x^{\Theta} \cdot a \varepsilon_{P(\tau)} = \omega_{P(\tau)}(a) \varepsilon_{P(\tau)} \cdot x^{\Theta}.$$

Aus dieser Vertauschungsrelation folgt durch einen Schluß, den wir schon mehrfach anwendeten

$$x^{\Theta} = e_{P(\tau)} * k^{\Theta}.$$

Der Automorphismus Θ hat also folgende Gestalt:

$$a * k \rightarrow a^{\Theta} * k^{\Theta} \quad \text{bezw.} \quad k * a \rightarrow k^{\Theta} * a.$$

Dabei bedeutet $k \rightarrow k^{\Theta}$ einen signierungstreuen Automorphismus ϕ von f . Der Automorphismus Θ von $\mathcal{R}$ liegt dann und nur dann in $\mathcal{U}$, wenn $k \rightarrow k^{\Theta}$ der identische Automorphismus in f ist. Es entspricht also jeder Restklasse von $\mathcal{L}$ modulo $\mathcal{U}$ genau ein Automorphismus von f aus $\mathcal{G}_3$. Andererseits läßt sich jeder signierungstreue Automorphismus von f auf $\mathcal{R}$ fortsetzen durch die Festsetzung:

$$a * k \rightarrow a^{\phi} * k^{\phi} \quad \text{bezw.} \quad k * a \rightarrow k^{\phi} * a^{\phi}.$$

Dabei bedeutet $a \rightarrow a^{\phi}$ einen geeigneten Automorphismus von $\mathcal{H}$, welcher α_{τ} auf $\alpha_{P(\tau)}$ abbildet. Ein solcher existiert wegen der Definition von $\mathcal{J}$. Es besteht also eine eindeutige Zuordnung zwischen den Restklassen von $\mathcal{L}$ modulo $\mathcal{U}$ und den Automorphismen der Gruppe $\mathcal{G}_3$.

Satz 3: Für das verschränkte Produkt $\mathcal{R} = (f, S, \mathcal{H})$ mögen alle Aufspaltungen durch innere Automorphismen auseinander hervorgehen (5.6.). $\mathcal{A}$ bedeute die Gruppe aller Automorphismen von $\mathcal{R}$, $\mathcal{I}$ die der inneren. $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ sei die Gruppe aller streng signierungstreuen inneren Automorphismen von f .

Dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \mathcal{G}_3/\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$.

Beweis: Ist ϕ ein beliebiger Automorphismus von $\mathcal{R}$ und gehen alle zu $\bar{\mathcal{H}}$ konjugierten Teilringe durch innere Automorphismen aus $\bar{\mathcal{H}}$ hervor, so gibt es ein $\Theta \in \mathcal{I}$, so daß $\Theta\phi \in \mathcal{L}$ ist. Es ist also $\mathcal{A} = \mathcal{I} \cdot \mathcal{L}$. Anwendung der beiden bekannten Isomorphiesätze und von Satz 2 ergibt:

$$\alpha_{\mathfrak{f}} = \mathcal{L} \mathfrak{f} / \mathfrak{f} \cong \mathcal{L} / \mathfrak{f} \cap \mathcal{L} \cong (\mathcal{L} / \mathcal{U}) / (\mathfrak{f} \cap \mathcal{L} / \mathcal{U}) \cong \mathfrak{g}_{\mathfrak{f}} / \mathcal{W}.$$

Dabei bedeutet $\mathcal{W}$ das Bild von $\mathfrak{f} \cap \mathcal{L} / \mathcal{U}$ in $\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}$ bei dem Isomorphismus von $\mathcal{L} / \mathcal{U}$ auf $\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}$. Um dieses Bild zu bestimmen, wählen wir einen Vertreter δ einer Restklasse von $\mathfrak{f} \cap \mathcal{L}$ modulo $\mathcal{U}$. Wir können ihn so wählen, daß er $\bar{\mathfrak{g}}$ elementweise festläßt. Er bildet a^*k auf a^*k^δ ab und werde durch

$\delta(r) = qrq^{-1}$ gegeben. Es sei $q_{\varrho\tau}$ bzw. $\bar{q}_{\varrho\tau}$ die Komponente von q bzw. q^{-1} in $\mathcal{R}_{\varrho\tau}$. Dann ist $q_{\varrho\tau} = \bar{q}_{\varrho\tau} = 0$ falls $\varrho \neq \tau$ ist. Denn für $a \in \bar{\mathcal{A}}_{\varrho}$ ist $q \cdot a \cdot q^{-1} = a$ oder $q \cdot a = a \cdot q$, woraus folgt: $\sum_{\tau=1}^p q_{\tau\varrho} a = \sum_{\tau=1}^p a \cdot q_{\varrho\tau}$. Die Summanden der

linken Seite der Gleichung sind aus $\mathcal{R}_{1\varrho}, \mathcal{R}_{2\varrho}, \dots, \mathcal{R}_{p\varrho}$, die der rechten Seite aus $\mathcal{R}_{\varrho 1}, \mathcal{R}_{\varrho 2}, \dots, \mathcal{R}_{\varrho p}$. Da die Summe der $\mathcal{R}_{\varrho\tau}$ direkt ist, sind nur die $q_{\varrho\varrho}$ von Null verschieden.

Wegen der Vertauschbarkeit der $\bar{\mathcal{A}}_{\varrho}$ ($\varrho = 1, 2, \dots, p$) mit q folgt durch einen bekannten Schluß: $q_{\varrho\varrho} = e_{\varrho}^* k_{\varrho}$ mit $S(k_{\varrho}) = (\varrho\varrho)$. Der Automorphismus δ sieht daher so aus:

$$\delta(a^*k) = a^*k^\delta = e_{\varrho}^* k_{\varrho} a^*k e_{\tau}^* \bar{k}_{\tau} = a^* k_{\varrho} k \cdot \bar{k}_{\tau}$$

(falls $S(k) = (\varrho\tau)$). Die Abbildung $k \rightarrow k^\delta$ ist also ein streng signierungstreuer innerer Automorphismus von $\mathfrak{f}$, nämlich die Transformation mit $\sum_{\varrho=1}^p k_{\varrho}$. Also folgt $\mathcal{W} \subseteq \mathfrak{f}_{\mathfrak{f}}$.

Erzeugt umgekehrt die Transformation mit $l \in \mathfrak{f}$ einen streng signierungstreuen Automorphismus von $\mathfrak{f}$, und ist $l_{\varrho\tau}$ die Komponente von l aus $\mathfrak{f}_{\varrho} \mathfrak{f}_{\tau} = \mathfrak{f}_{\varrho\tau}$, so ist wegen der Signierungstreue nur $l_{\varrho\varrho}$ von Null verschieden. Setzt man $q = \sum_{\varrho=1}^p e_{\varrho}^* l_{\varrho\varrho}$, so erzeugt die Transformation mit q in $\mathcal{R}$ einen Automorphismus, den wir als Vertreter einer Restklasse von $\mathfrak{f} \cap \mathcal{L}$ modulo $\mathcal{U}$ nehmen können und für den gilt

$$q \cdot a^*k \cdot q^{-1} = a^*lkl^{-1} = a^*k^\delta.$$

Also ist auch $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathcal{W}$. Daher gilt $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}} = \mathcal{W}$.

Literaturverzeichnis

1. M.Deuring: Algebren; Ergebnisse der Mathematik,
Bd.4 (1935)
2. L.E.Dickson: Algebren und ihre Zahlentheorie; Orell
Füssli Verlag Zürich-Leipzig (1927)
3. E.Noether: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie;
Math.Zeitschrift Bd.30 (1929)
4. E.Noether: Nichtkommutative Algebra;
Math.Zeitschrift Bd.37 (1933)

Wahrheitsgemäße Erklärung

Ich erkläre wahrheitsgemäß, daß ich die vorliegende Abhandlung, abgesehen von der Förderung, die mir durch Herrn Universitätsprofessor Dr.W.Specht zuteil wurde, ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Die dabei benützte Literatur beschränkt sich auf die im Verzeichnis aufgeführten Abhandlungen.

Nürnberg, den 1.Dezember 1955

Helmut Dittmann

Lebenslauf

Ich, Helmut Dittmann, wurde am 27. Dezember 1929 als Sohn des kaufmännischen Angestellten Walter Dittmann und seiner Ehefrau Gertrud geb. Herrmann in Nürnberg geboren. Meine Jugend verbrachte ich im Elternhaus in Nürnberg, wo ich auch zur Schule ging. Nach vierjähriger Vorbereitung in der Volksschule besuchte ich die Oberschule an der Wölckernstraße in Nürnberg und nach zweijähriger, durch die Kriegsereignisse bedingter Unterbrechung, die Oberrealschule Fürth i. Bay., wo ich im Juli 1947 das Abitur bestand. Nach einjähriger praktischer Tätigkeit bezog ich im Herbst 1948 die Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen. Nach acht Semestern Studium, in denen ich mich besonders der Mathematik und Physik widmete, legte ich im Herbst 1952 die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen in Bayern mit der Fächerverbindung Mathematik und Physik ab. Anschließend besuchte ich das staatliche Studienseminar an der Dürer-Oberrealschule in Nürnberg, wo ich im Herbst 1953 das pädagogische Staatsexamen bestand. Seitdem bin ich als Studienassessor an der Oberrealschule Fürth i. Bay. als Lehrer für Mathematik und Physik tätig.

Zu großem Dank bin ich meinen akademischen Lehrern verpflichtet, den Herren Universitätsprofessoren Dr. O. Haupt, Dr. G. Nöbeling und besonders Herrn Professor Dr. W. Specht, dem ich die Anregung zur vorliegenden Arbeit und manchen wertvollen Hinweis verdanke.

Nürnberg, am 1. Dezember 1955

Helmut Dittmann

FOTODRUCK SCHETTER NÜRNBERG

